

**ΓΡΑΠΤΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΜΕΛΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 29-08-2022**

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 2 ΩΡΕΣ

Το «ΑΡΙΣΤΑ» αντιστοιχεί σε 30 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1. (i) Αν $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$, δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^n. \quad \text{(Μονάδες 5)}$$

(ii) Δείξτε ότι για κάθε μη αρνητικούς ακεραίους m, n ισχύει η σχέση

$$\sum_{r=0}^m \binom{n+r}{r} = \binom{m+n+1}{m}. \quad \text{(Μονάδες 5)}$$

ΘΕΜΑ 2. (i) Αν $f(x)$ είναι ένα πραγματικό μη μηδενικό πολυώνυμο και $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \neq 0$, μια μιγαδική ρίζα του $f(x)$ πολλαπλότητας $r \geq 1$, να δείξετε ότι και ο συζυγής $\bar{z} = \alpha - \beta i$ είναι επίσης ρίζα του $f(x)$ **της ίδιας πολλαπλότητας r .** (Μονάδες 5)

(ii) Να λύσετε στο \mathbb{C} την εξίσωση: $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3. (i) Αν φ είναι μια γωνία και $\rho > 0$, δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n το πολυώνυμο $f(x) = x^n \sin \varphi - \rho^{n-1} x \sin(n\varphi) + \rho^n \sin((n-1)\varphi)$ διαιρείται από το πολυώνυμο $g(x) = x^2 - 2\rho x \cos \varphi + \rho^2$. (Μονάδες 5)

(ii) Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει η σχέση

$$(1 + i)^n - (1 - i)^n = 2i\sqrt{2}^n \sin \frac{n\pi}{4} \quad \text{(Μονάδες 5)}$$

Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστών τσέπης και σημειώσεων.