Θεμέλια Άλγεβρας και Γεωμετρίας
Επαναληπτικές Ασκήσεις

Άσκηση 1. Σωστό ή Λάθος; Εξηγήστε.
(α) Αν A, B, C είναι υποσύνολα ενός συνόλου Ω και $A \subseteq C$, τότε $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
(β) Αν A, B, C είναι υποσύνολα ενός συνόλου Ω, τότε $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
(γ) Αν A, B, C είναι υποσύνολα ενός συνόλου Ω και $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, τότε $A \subseteq C$.

Άσκηση 2. Θεωρούμε ένα σύνολο Ω και εφοδιάζουμε το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\Omega)$ με την πράξη $+$, η οποία ορίζεται θέτοντας $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ για κάθε $A, B \subseteq \Omega$. Να δείξετε ότι για κάθε $A, B \subseteq \Omega$ ισχύουν τα εξής:
(α) $A + B = \emptyset$ αν και μόνο αν $A = B$,
(β) $A + B = \Omega$ αν και μόνο αν $A = B^c$ είναι το συμπλήρωμα του B στο Ω και
(γ) $A + B = B$ αν και μόνο αν $A = \emptyset$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbf{N}$ των φυσικών αριθμών και ορίζουμε σε αυτό μια σχέση, ως εξής: Αν n, m είναι δύο φυσικοί αριθμοί, τότε λέμε ότι ο n σχετίζεται με τον m αν και μόνο αν υπάρχουν σύνολα X, Y και απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$, έτσι ώστε:
(α) το X περιέχει n στοιχεία,
(β) το Y περιέχει m στοιχεία και
(γ) η f είναι 1-1 και επί.
Να δείξετε ότι η παραπάνω σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας και να περιγράψετε την κλάση ισοδυναμίας του φυσικού αριθμού n.

Άσκηση 4. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbf{C}$ των μιγαδικών αριθμών και ορίζουμε σε αυτό μια σχέση, ως εξής: Αν z, w είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε λέμε ότι ο z σχετίζεται με τον w αν και μόνο αν $z^4 = w^4$. Να δείξετε ότι η παραπάνω σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας και να περιγράψετε την κλάση ισοδυναμίας του μιγαδικού αριθμού z.

Άσκηση 5. Έστω X, Y δύο σύνολα. Αν το σύνολο X περιέχει τουλάχιστον 2 στοιχεία, να δείξετε ότι οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$:
(α) Η f είναι 1-1 και επί.
(β) Υπάρχει μοναδική απεικόνιση $r : Y \longrightarrow X$, τέτοια ώστε $r \circ f = I_X$.
(γ) Υπάρχει μοναδική απεικόνιση $s : Y \longrightarrow X$, τέτοια ώστε $f \circ s = I_Y$.

Άσκηση 6. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ με $f(t) = t^4 \in \mathbf{R}$ για κάθε $t \in \mathbf{R}$. Να υπολογίσετε τα υποσύνολα $f(A), f^{-1}(B) \subseteq \mathbf{R}$, όπου $A = (-2, 1]$ και $B = [1, 16)$.

Άσκηση 7. Έστω $A = \mathbf{R} \setminus \{5\}$. Να δείξετε ότι η πράξη $*$ με $x * y = 5x + 5c - xy - 20$ είναι καλά ορισμένη στο A και το εφοδιάζει με τη δομή μιας αβελιανής ομάδας. Ποιο είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας αυτής;

Άσκηση 8. Να αποδείξετε επαγωγικά ότι:
(α) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ για κάθε $n \geq 1$.
(β) $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$ για κάθε $n \geq 1$.
Υπόδειξη: Για το (β), μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\ln x \leq x - 1$ για $x > 0$.

Άσκηση 9. (α) Να βρείτε όλους τους μιγαδικους αριθμούς $z \in \mathbf{C}$ που είναι τέτοιοι ώστε $z^2 = 3 + 4i$.
(β) Αν $w \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ και $w^6 = 1$, να δείξετε ότι $1 + w^2 + w^4 = 0$.

Άσκηση 10. Θεωρούμε ένα πολυώνυμο $f(X) \in \mathbf{R}[X]$ για το οποίο ισχύει ότι $f(1) = -1$ και $f(-1) = 1$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(X)$ με το $X^2 - 1 \in \mathbf{R}[X]$.