Διαφορική Γεωμετρία 1
Φυλλάδιο προβλημάτων

27 Δεκεμβρίου 2020

1 Χάρτες - ομαλές απεικονίσεις - εφαπτόμενη δέσμη - push forward - διανυσματικά πεδία

1.1 Στερεογραφική προβολή στην σφαίρα $\mathbb{S}^n$

1. Στερεογραφική προβολή. Έστω $N = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ο Βόρειος πόλος της σφαίρας, και $S = -N$ ο Νότιος πόλος. Η στερεογραφική προβολή ορίζεται ως $\sigma : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$

$$\sigma(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \frac{(x^1, \ldots, x^n)}{1 - x^{n+1}}$$

και $\tilde{\sigma}(x) = -\sigma(-x)$ για $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. (Ο ορισμός είναι λίγο διαφορετικός από αυτόν στη διάλεξη, αλλά είναι ουσιαστικά ισοδύναμος)

(α΄) Για κάθε $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ να δείξετε ότι το $\sigma(x)$ είναι το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα N και x με το επίπεδο $x^{n+1} = 0$. Αντίστοιχα, για κάθε $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ το $\tilde{\sigma}(x)$ είναι το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα S και x με το επίπεδο $x^{n+1} = 0$.

(β΄) Να δείξετε ότι η σ είναι $1 - 1$ και επί και

$$\sigma^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = \frac{(2u^1, \ldots, 2u^n, |u|^2 - 1)}{|u|^2 + 1}.$$

(γ΄) Να υπολογίσετε την απεικόνιση μετάβασης $\tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1}$ και να επιβεβαιώσετε ότι ο άτλαντας $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \sigma), (\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \tilde{\sigma})$ ορίζει μια διαφορική δομή στην $\mathbb{S}^n$.

(δ΄) Να δείξετε ότι η διαφορική δομή που ορίζει ο άτλαντας του υποερωτήματος (γ'), είναι η ίδια με τη διαφορική δομή που ορίζουν οι 6 χάρτες που ορίσαμε στις διαλέξεις, δείτε την Ενότητα 1.3 στις σημειώσεις.

2. Χρησιμοποιώντας τις στερεογραφικές προβολές του προηγούμενου προβλήματος να δείξετε ότι οι παρακάτω απεικονίσεις είναι ομαλές.

   (α΄) $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $n \in \mathbb{Z}$, όπου
   $$p_n(z) = z^n,$$
   για κάθε $z \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

   (β΄) $\alpha : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $\alpha(x) = -x$.

3. Να δείξτε, χρησιμοποιώντας τις στερεογραφικές προβολές, ότι υπάρχει ένα διανυσματικό πεδίο στην $\mathbb{S}^n$ το οποίο μηδενίζεται ακριβώς σε ένα σημείο.

4. Να δείξετε ότι η $T\mathbb{S}^1$ είναι αμφιδιαφορική με την $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

1.2 Προβολικοί χώροι $\mathbb{RP}^n$ και $\mathbb{CP}^n$

1. Ο μιγαδικός προβολικός χώρος $\mathbb{CP}^n$. Στο $\mathbb{C}^{n+1}$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας: αν $z, w \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$
   $$z \sim w \iff z = \lambda w, \text{ για } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$
   Το σύνολο πηλίκο είναι ο μιγαδικό προβολικός χώρος $\mathbb{CP}^n$, και είναι το σύνολο των μιγαδικών υποχώρων του $\mathbb{C}^{n+1}$, μιγαδικής διάστασης 1, και εφοδιάζεται με την τοπολογία πηλίκο που προκύπτει από την προβολή $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$.

   (α΄) Να δείξετε ότι ο $\mathbb{CP}^n$ δέχεται διαφορική δομή που τον κάνει μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $2n$, ορίζοντας χάρτες παρόμοιους με αυτούς που ορίστηκαν για τον πραγματικό προβολικό χώρο. Χρησιμοποιείστε την ταύτιση του $\mathbb{C}^{n+1}$ με τον $\mathbb{R}^{2n+2}$ όπου
   $$(x^1 + iy^1, \ldots, x^{n+1} + iy^{n+1}) \leftrightarrow (x^1, y^1, \ldots, x^{n+1}, y^{n+1}).$$

   (β΄) Να δείξετε ότι η απεικόνιση πηλίκο $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \mathbb{CP}^n$ είναι ομαλή.

   (γ΄) Να δείξετε ότι ο $\mathbb{CP}^1$ είναι αμφιδιαφορικός με την $\mathbb{S}^2$.

2. Δείξτε ότι ο $\mathbb{RP}^1$ είναι αμφιδιαφορικός με τον κύκλο $\mathbb{S}^1$.

3. Έστω $P : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ μια ομαλή απεικόνιση με την ιδιότητα ότι για κάθε $d \in \mathbb{Z}$,
   $$P(\lambda x) = \lambda^d P(x),$$
   για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $\tilde{P} : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^k$
   $$\tilde{P}([x]) = [P(x)]$$
   είναι καλά ορισμένη και ομαλή.

1.3 Ομαλές απεικονίσεις - push forward

1. Να δείξετε ότι αν M είναι μια μη κενή διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $n \geq 1$, ο γραμμικός χώρος $C^\infty(M)$ είναι άπειρης διάστασης.

   Υπόδειξη: μπορείτε να βρείτε άπειρες bump functions που να είναι γραμμικά ανεξάρτητες;

2. Έστω M, N δύο διαφορικές πολλαπλότες, η M συνεκτική, και $F : M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση ώστε το pushforward
$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$$
   να είναι η μηδενική απεικόνιση για κάθε $p \in M$, δηλαδή για κάθε $X_p \in T_pM$, $F_*X_p = 0_{F(p)} \in T_{F(p)}N$. Να δείξετε ότι η F είναι σταθερή, δηλαδή $F(x) = q \in N$ για κάθε $x \in M$.

3. Έστω $M_1, \dots, M_k$ διαφορικές πολλαπλότητες και $\pi_j : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_j$ η προβολή στον j παράγοντα. Να δείξετε ότι για κάθε $(p_1, \dots, p_k) \in M_1 \times \cdots \times M_k$ η απεικόνιση
$$\alpha : T_{(p_1,\dots,p_k)}(M_1 \times \cdots \times M_k) \to T_{p_1}M_1 \times \cdots T_{p_k}M_k$$
$$\alpha(X) = (\pi_{1*}X, \dots, \pi_{k*}X)$$
   είναι ισομορφισμός.

1.4 Διανυσματικά πεδία

1. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και Y ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε ένα κλειστό υποσύνολο $A \subset M$, και $U \subset M$ ανοιχτό ώστε $A \subset U$. Να δείξετε ότι υπάρχει ομαλό διανυσματικό πεδίο $\tilde{Y} \in \mathcal{X}(M)$ ώστε $\tilde{Y}|_A = Y$ και supp$\tilde{Y} \subset U$.

   Σημείωση: Με τη φράση "Y ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε ένα κλειστό υποσύνολο $A \subset M$" εννοούμε ότι $Y : A \to TM$ είναι συνεχής, $\pi \circ Y = id_A$, ενώ για κάθε $p \in A$ υπάρχει ανοιχτο $U_p \subset M$, $p \in U_p$ και ομαλή επέκταση $\tilde{Y}^{(p)} \in \mathcal{X}(U_p)$ με $\tilde{Y}^{(p)}|_A = Y$.

   Υπόδειξη: εφαρμόστε την ίδια τεχνική (με χρήση partition of unity) που εφαρμόσαμε για την επέκταση συναρτήσεων.

2. Για τα παρακάτω διανυσματικά πεδία υπολογίστε τις αναπαραστάσεις τους ως προς πολικές συντεταγμένες στο άνω ημιεπίπεδο.

   (α΄) $V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$

   (β΄) $W = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$

   (γ΄) $X = (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x}$

3. Αν M, N είναι διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \to N$ είναι μια ομαλή απεικόνιση, έστω $F : M \to M \times N$
$$F(x) = (x, f(x)).$$
Να δείξετε ότι για κάθε $V \in \mathcal{X}(M)$ υπάρχει ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο $W \in \mathcal{X}(M \times N)$ ώστε τα V, W να είναι F-συσχετισμένα.

4. Έστω $F : M \to N$ μια τοπική αμφιδιαφόριση (δηλαδή για καθε $p \in M$ υπάρχουν $p \in U \subset M$ και $F(p) \in W \subset N$, ανοιχτά υποσύνολα, ώστε $F : U \to W$ να είναι αμφιδιαφόριση) Να δείξετε ότι για κάθε $Y \in \mathcal{X}(N)$ υπάρχει μοναδικό ομαλό διανυσματικό πεδίο $X \in \mathcal{X}(M)$ ώστε τα X, Y να είναι F-συσχετισμένα.

5. Να υπολογίσετε τις αγκύλες Lie $[V, W]$ των παρακάτω διανυσματικών πεδίο του $\mathbb{R}^3$.

   (α΄) $V = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial}{\partial y}$.

   (β΄) $V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad W = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$.

2 Διανυσματικές δέσμες - συνεφαπτόμενη δέσμη

1. Να υπολογίσετε την απεικόνιση μετάβασης για την $T\mathbb{S}^2$ για τις δύο τετριμενοποιήσεις που προκύπτουν από τις στερεογραφικές προβολές $\sigma, \tilde{\sigma}$.

2. Έστω $F : M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση ανάμεσα σε δύο διαφορικές πολλαπλότητες. Να δείξετε ότι οτι η απεικόνιση pullback
$$F^* : T^*N \to T^*M$$
είναι μια ομαλή απεικόνιση δεσμών.

3. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα. Να δείξετε ότι η TM είναι τετριμένη αν και μόνο αν η T^*M είναι.

4. Δείξτε ότι η ταυτολογική δέσμη πάνω από τον $\mathbb{RP}^1$ είναι ισομορφική με την ταινία του Möbius.

3 1- μορφές και η ολοκλήρωσή τους.

1. Έστω $F : M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση, $\omega \in \Gamma(T^*N)$, και $\gamma : [0,1] \to M$ μια ομαλή καμπύλη στην M. Να αποδείξετε ότι
$$\int_\gamma F^*\omega = \int_{F\circ\gamma} \omega.$$

2. Ορίζουμε τις ακόλουθες 1-μορφές στον $\mathbb{R}^3$

$$\omega = -\frac{4z}{(x^2+1)^2}dx + \frac{2y}{y^2+1}dy + \frac{2x}{x^2+1}dz,$$
$$\eta = -\frac{4xz}{(x^2+1)^2} + \frac{2y}{y^2+1}dy + \frac{2}{x^2+1}dz.$$

   (α΄) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα των ω, η κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει το $(0,0,0)$ με το $(1,1,1)$.

   (β΄) Να ελέγξετε αν η ω και η η είναι ακριβής και αν ναι να υπολογίσετε μια συνάρτηση δυναμικού, ώστε, για παράδειγμα, $\omega = df$.

3. Να δείξετε ότι κάθε ακριβής 1-μορφή σε μια διαφορική πολλαπλότητα M μηδενίζεται σε τουλάχιστον δύο σημεία της M.

4 Immersions, submersions και εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες

Θα προστεθούν και μερικές ακόμα ενδεικτικές ασκήσεις, βάζω αυτές προς το παρόν - η (1) χρησιμοποιείται στη (2) - κυρίως γιατί έχουν ενδιαφέρον, αν και είναι ίσως πιο απαιτητικές.

1. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$

$$p(x) = [x]$$

   είναι ομαλή απεικόνιση επικάλυψης, $[x] \in \mathbb{RP}^2$ συμβολίζει την κλαση ισοδυναμίας του $x \in \mathbb{R}^3$.

2. Έστω $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4$ η ομαλή απεικόνιση

$$F(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

   Να αποδείξετε ότι η F ορίζει μια ομαλή εμφύτευση $\tilde{F} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$.

5 Ροές διανυσματικών πεδίων - παράγωγος Lie

1. Να υπολογίσετε τις ροές για κάθε ένα από τα παρακάτω διανυσματικά πεδία στον $\mathbb{R}^2$, και να βρείτε συστήματα συντεταγμένων γύρω από το $(1,0)$ ώστε το κάθε διανυσματικό πεδίο να είναι πεδίο συντεταγμένων.

   (α΄) $V = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$

   (β΄) $W = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$

(γ΄) $X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$

(δ΄) $Y = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$

2. Έστω $S \subset M$ μια συμπαγής εμφυτεμένη υποπολλαπλότητα συνδιάστασης 1. Έστω $V \in \mathcal{X}(M)$ ένα διανυσματικό πεδίο *εγκάρσιο* στην S (δηλαδή δεν εφάπτεται στην S σε κανένα σημείο της). Να δείξετε ότι η ροή του V ορίζει μια αμφιδιαφόριση του $(-\varepsilon, \varepsilon) \times S$ με μια ανοιχτή γειτονιά της S, για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$.

3. Έστω M μια συνεκτική διαφορική πολλαπλότητα. Δείξτε ότι για καθε δύο σημεία $p, q \in M$ υπάρχει αμφιδιαφόριση $F : M \to M$ ώστε $F(p) = q$.

   Υπόδειξη: Αν τα p, q ανήκουν στο πεδίο ορισμού U ενός χάρτη, υπάρχει διανυσματικό πεδίο στο U του οποίου η ροή στέλνει το p στο q; Στη συνέχεια, επεκτείνετε αυτό το πεδίο σε όλη την M χρησιμοποιώντας κατάλληλη διαμέριση της μονάδας, και ορίστε τη ζητούμενη F μέσω της ροής του. Στη γενική περίπτωση, που τα p, q δεν ανήκουν σε κοινό χάρτη, προσπαθείστε να κατασκευάσετε την F βήμα - βήμα, μετακινόντας σε κάθε βήμα το p προς το q μέσα σε κάποιο χάρτη.

4. Δώστε ένα παράδειγμα διανυσματικών πεδίων $V, \tilde{V}$ και W στον $\mathbb{R}^2$ ώστε κατά μήκος του άξονα των x να ισχύει $V = \tilde{V} = \frac{\partial}{\partial x}$ αλλά $L_V W|_0 \neq L_{\tilde{V}} W|_0$.

5. Έστω τα διανυσματικά πεδία $V_1 = \frac{\partial}{\partial x}, V_2 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ στον $\mathbb{R}^2$. Να βρείτε, αν υπάρχει, χάρτης του $\mathbb{R}^2$ με συντεταγμένες (u^1, u^2) ώστε $V_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, V_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}$.