Θ.1

(α) Υπολογίζουμε $\det A = 3$ και άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Για να υπολογίσουμε τον A^{-1} εφαρμόζουμε τη διαδικασία αναγωγής του A στον I_3 με γραμμοπράξεις στον ίδιο τον I_3:

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -2/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2/3 & 14/3 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$$

Άρα $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2/3 & 11/3 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ -5 & -2/3 & 14/3 \end{pmatrix}$

(β) Υπολογίζουμε $B = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 8 \\ -6 & -4 & 6 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ και $\det B = 0$.

Άρα ο πίνακας B δεν είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $r(B) < 3$. Καθώς οι στήλες $c_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}$ και $c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, είναι $r(B) \geq 2$. Τελικά $r(B) = 2$

(γ) Η εξίσωση $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ γράφεται $\begin{cases} -12x + 8z = 0 \\ -6x - 4y + 6z = 0 \\ -12x + 8z = 0 \end{cases}$

Ο χώρος των λύσεων $\left\{ \begin{pmatrix} 4t \\ 3t \\ 6t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ έχει βάση το

$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

<u>Θ. 2</u>

(α) Υπολογίζουμε $U = \left\{ \left(x, y, z, -x-y-z, \frac{x+z}{2} \right) : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

και άρα $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ όπου $u_1 = (1, 0, 0, -1, 1/2)$,

$u_2 = (0, 1, 0, -1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, -1, 1/2)$

Συνεπώς $U + V = \langle u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \rangle$ όπου $v_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$

και $v_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$.

Καθώς $v_2 - v_1 = (1, -1, 1, -1, 1) = u_1 - u_2 + u_3$, τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Τα διανύσματα u_1, u_2, u_3, v_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα $\dim(U + V) = 4$. Κατά συνέπεια, $U + V \neq \mathbb{R}^5$

(β) Είναι $\dim U = 3$ (τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $\dim V = 2$ (τα διανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα). Συνεπώς

$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim U + \dim V \Rightarrow$

$\dim(U \cap W) + 4 = 3 + 2 \Longrightarrow \dim(U \cap V) = 1$

Είναι $v_2 - v_1 = u_1 - u_2 + u_3 \in U \cap V$ και άρα μια βάση του $U \cap V$ είναι το $v_2 - v_1 = (1,-1,1,-1,1)$

(γ) Είναι $v_1 \notin \langle v_1 - v_2 \rangle = U \cap V$ και $v_1 \in V$

Συνεπώς, για $W = \langle v_1 \rangle$ είναι

$(U \cap V) + W \supsetneq U \cap V$ και $(U \cap V) + W \subseteq V$

Άρα $\dim[(U \cap V) + W] > 1$ και

$\dim[(U \cap V) + W] \leq 2$

Συνεπώς $\dim[(U \cap V) + W] = 2 = \dim V$

και άρα $(U \cap V) + W = V$. Επιπλέον,

καθώς $(U \cap V) \cap W \subseteq U \cap V$ και $\dim(U \cap V) = 1$,

είναι: $(U \cap V) \cap W = 0$ ή $(U \cap V) \cap W = U \cap V$.

Αν $(U \cap V) \cap W = U \cap V$, τότε $U \cap V \subseteq W$ και

άρα (καθώς $\dim W = 1 = \dim(U \cap V)$) $U \cap V = W$

Συνεπώς $v_1 \in W = U \cap V$ άτοπο

Τελικά είναι $(U \cap V) \cap W = 0$ και άρα το

άθροισμα $(U \cap V) + W$ είναι ευθύ.

Θ.3

(α) Είναι $\varepsilon_1 = (1,0,0) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2 - u_3)$

$\varepsilon_2 = (0,1,0) = \frac{1}{2}(-u_1 + u_2 + u_3)$

$\varepsilon_3 = (0,0,1) = \frac{1}{2}(u_1 - u_2 + u_3)$

Συνεπώς

$f(\varepsilon_1) = \frac{1}{2}[f(u_1) + f(u_2) - f(u_3)] = (2,1)$

$f(\varepsilon_2) = \frac{1}{2}[-f(u_1) + f(u_2) + f(u_3)] = (2,1)$

$f(\varepsilon_3) = \frac{1}{2}[f(u_1) - f(u_2) + f(u_3)] = (0,5)$

Άρα

$f(3,1,0) = 3f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) = (8,4)$

(β) Είναι

$$(f : \hat{\varepsilon}, \hat{v}) = (I : \hat{e}, \hat{v})(f : \hat{\varepsilon}, \hat{e})$$

$$= (I, \hat{v}, \hat{e})^{-1}(f : \hat{\varepsilon}, \hat{e})$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ -4 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

(γ), (δ) Καθώς οι 2 πρώτες στήλες του πίνακα $A = (f : \hat{u}, \hat{e})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, είναι $\dim \operatorname{im} f = r(A) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ και άρα $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^2$, δηλαδή η f είναι επί.

Συνεπώς, $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{im} f = 3 - 2 = 1$

Καθώς $f(u_1) = f(u_3)$ $\Big(= (2, 6) \Big)$, έπεται ότι $f(u_1 - u_3) = 0$ και άρα $u_1 - u_3 \in \ker f$.

Τελικά, είναι $\ker f = \langle u_1 - u_3 \rangle$ και μια βάση του πυρήνα $\ker f$ είναι το διάνυσμα $u_1 - u_3 = (1, -1, 0)$.
