# Συνδυαστική Θεωρία

## Πρώτη Ομάδα Ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Δίνονται $F(x), G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$.

**(α)** Αν $F(x) \cdot G(x) = 0$, δείξτε ότι $F(x) = 0$ ή $G(x) = 0$.

**(β)** Σωστό ή λάθος; Αν $F(x), G(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ και $(F(x))^2 + (G(x))^2 = 0$, τότε $F(x) = G(x) = 0$.

**Λύση.** **(α)** Έστω ότι $F(x) \neq 0$ και $G(x) \neq 0$. Θα δείξουμε ότι $F(x) \cdot G(x) \neq 0$. Πράγματι, έστω ότι

$$\begin{cases} F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\ G(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \end{cases}$$

και έστω $k$ και $\ell$ ο ελάχιστος $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο $a_n \neq 0$ και $b_n \neq 0$, αντίστοιχα, δηλαδή

$$\begin{cases} F(x) = \sum_{n \geq k} a_n x^n \\ G(x) = \sum_{n \geq \ell} b_n x^n \end{cases}$$

με $a_k, b_\ell \neq 0$. Τότε,

- $$F(x)G(x) = \left(\sum_{n\geq k} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq \ell} b_n x^n\right)$$

$$= (a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots) \cdot$$
$$(b_\ell x^\ell + b_{\ell+1} x^{\ell+1} + \cdots)$$

$$= a_k b_\ell x^{k+\ell} + \cdots$$

Άρα,

$$[x^{k+\ell}]\, F(x)G(x) = a_k b_\ell \neq 0$$

και συνεπώς $F(x)G(x) \neq 0$.

(β) Είναι σωστό. Ένας τρόπος είναι να εργασθεί κανείς όπως στο (α).

Ένας άλλος είναι ο εξής:

- $(F(x))^2 + (G(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(F(x) + iG(x))(F(x) - iG(x)) = 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) + iG(x) = 0 \quad \acute{\eta} \\ F(x) - iG(x) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$F(x) = G(x) = 0.$$

**Άσκηση 2.** Για $n, r, k \in \mathbb{N}$ με $n, r \geq 1$ συμβολίζουμε με $f(n,r,k)$ το πλήθος των $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0, 1, \ldots, r-1\}^n$ με $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$.

(α) Υπολογίστε τη $\sum_{k \geq 0} f(n,r,k) x^k$.

(β) Πόσα $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{0, 1, \dots, r-1\}^n$ έχουν την ιδιότητα $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \in 2\mathbb{N}$ ;

Λύση. (α) Έχουμε

- $$F_{n,r}(x) := \sum_{k \geq 0} f(n,r,k)\, x^k$$

$$= \sum_{0 \leq a_1, \dots, a_n < r} x^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left( \sum_{a_i = 0}^{r-1} x^{a_i} \right)$$

$$= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{r-1})^n.$$

(β) Το ζητούμενο πλήθος είναι το

- $$\sum_{k\geq 0} f(n,r,2k) = \frac{1}{2}\left\{F_{n,r}(1) + F_{n,r}(-1)\right\}$$

$$= \begin{cases} r^n/2, & \text{αν } r\in 2\mathbb{N} \\ (r^n+1)/2, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

**Άσκηση 3.** Έστω $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ και έστω $c(n,m)$ το πλήθος των συνθέσεων του $n \in \mathbb{N}$ με μέρη περιττούς ακεραίους $\leq 2m-1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n\geq 0} c(n,m)\, x^n = \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^{2m+1}},$$

όπου $c(0,m) := 1$.

Λύση. Έχουμε

- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c(n,m)\,x^n =$

$$= \sum_{k\geq 0} \sum_{r_i \in \{1,3,\ldots,2m-1\}} x^{r_1+r_2+\cdots+r_k}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \sum_{r_i \in \{1,3,\ldots,2m-1\}} x^{r_1} x^{r_2} \cdots x^{r_k}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \prod_{i=1}^{k} \sum_{r_i \in \{1,3,\ldots,2m-1\}} x^{r_i}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \prod_{i=1}^{k} (x + x^3 + \cdots + x^{2m-1})$$

$$= \sum_{k \geq 0} (x + x^3 + \cdots + x^{2m-1})^k$$

$$= \frac{1}{1 - (x + x^3 + \cdots + x^{2m-1})}$$

$$= \frac{1}{1 - x(1 - x^{2m})/(1 - x^2)}$$

$$= \frac{1 - x^2}{1 - x - x^2 + x^{2m+1}}.$$

Άσκηση 4. Για $n \in \mathbb{N}$ έστω:

- $\sigma(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του $n$ στις οποίες κανένα μέρος δεν εμφανίζεται με πολλαπλότητα ένα

- $\tau(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του $n$ με μέρη $\not\equiv \pm 1 \pmod 6$.

Δείξτε ότι $\sigma(n) = \tau(n)$ για κάθε $n$.

Λύση. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.9 των διαλέξεων,

- $$\sum_{n \geq 0} \sigma(n) x^n = \prod_{i \geq 1} \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} x^{ij},$$

- $$\sum_{n \geq 0} \tau(n) x^n = \prod_{i \not\equiv \pm 1 \pmod 6} \sum_{j \geq 0} x^{ij}.$$

Επομένως,

- $$\sum_{n\geq 0} \sigma(n) x^n = \prod_{i\geq 1} \left( \sum_{j\geq 0} x^{ij} - x^i \right)$$

$$= \prod_{i\geq 1} \left( \frac{1}{1-x^i} - x^i \right) = \prod_{i\geq 1} \frac{1-x^i+x^{2i}}{1-x^i}$$

$$= \prod_{i\geq 1} \frac{1+x^{3i}}{(1-x^i)(1+x^i)}$$

$$= \prod_{i\geq 1} \frac{1-x^{6i}}{(1-x^{3i})(1-x^{2i})}$$

$$= \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x^{2i}} \cdot \prod_{\substack{i\geq 1 \\ i\equiv 1 \pmod 2}} \frac{1}{1-x^{3i}}$$

$$= \prod_{\substack{i \geq 1 \\ i \equiv 0,2,3,4 \pmod 6}} \frac{1}{1-x^i}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \tau(n) x^n.$$

Άρα, $\sigma(n) = \tau(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

**Άσκηση 5.** Για ποιες $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ υπάρχει $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $G(x) = (F(x))^3$;

**Λύση.** Για $F(x) = \sum a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ με $F(x) \neq 0$ θέτουμε $\delta(F(x)) = k$ αν

$k = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$, δηλαδή αν

$$F(x) = \sum_{n \geq k} a_n x^n$$

με $a_k \neq 0$. Τότε,

$$(F(x))^3 = \left(\sum_{n \geq k} a_n x^n\right)^3 = a_k^3 x^{3k} + \cdots$$

και συνεπώς $\delta(F(x))^3 = 3k \in 3\mathbb{N}$.
Άρα, αν $G(x) = (F(x))^3$ για κάποια $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ θα πρέπει $\delta(G(x)) \in 3\mathbb{N}$ ή $G(x) = 0$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν $G(x) \neq 0$

και $\delta(G(x)) \in 3\mathbb{N}$, τότε υπάρχει $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $G(x) = (F(x))^3$.

Έστω λοιπόν ότι $\delta(G(x)) = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, οπότε

$$G(x) = \sum_{n \geqslant 3k} b_n x^n$$

με $b_{3k} \neq 0$. Τότε

- $$G(x) = b_{3k} x^{3k} \sum_{n \geqslant 3k} (b_n / b_{3k}) x^{n-3k}$$

$$= b_{3k} x^{3k} \left( 1 + \frac{b_{3k+1}}{b_{3k}} x + \cdots \right)$$

$$= b_{3k}\, x^{3k}\, (1 + H(x))$$

για κάποια $H(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $H(0) = 0$. Τότε, ορίζεται η

- $$F_0(x) = (1 + H(x))^{1/3} = \sum_{n \geq 0} \binom{1/3}{n} (H(x))^n$$

με $(F_0(x))^3 = 1 + H(x)$. Επιλέγουμε $a \in \mathbb{C}$ με $a^3 = b_{3k}$. Θέτουμε $F(x) = a x^k F_0(x)$ και παρατηρούμε ότι

- $$(F(x))^3 = a^3 x^{3k} (F_0(x))^3 = b_{3k}\, x^{3k}\, (1 + H(x)) = G(x).$$

# Συνδυαστική Θεωρία

## Δεύτερη Ομάδα Ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Πόσες μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_6$ υπάρχουν με $w(4) = 6$ και $\mathrm{inv}(w) = 7$;

**Λύση.** Διαγράφοντας το $w(4) = 6$ από την αναδιάταξη

$$(w(1), w(2), w(3), w(4), w(5), w(6))$$

προκύπτει μετάθεση $u \in \mathfrak{S}_5$ με $\mathrm{inv}(u) = 5$, και κάθε τέτοια προκύπτει ακριβώς μία φορά. Άρα, το ζητούμενο πλήθος ισούται με

- $\# \{ u \in \mathfrak{S}_5 : \mathrm{inv}(u) = 5 \}$

$$= [x^5] \, (1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

$$= 22.$$

Άσκηση 2. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει κανείς μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ και να χρωματίσει καθέναν από τους ακεραίους $1, 2, \ldots, n$ άσπρο ή μαύρο, έτσι ώστε το ελάχιστο στοιχείο κάθε κύκλου της $w$ να είναι άσπρο;

**Λύση.** Υπάρχουν $c(n,k)$ μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_n$ με $k$ κύκλους και $2^{n-k}$ τρόποι να χρωματιστούν οι $1, 2, \ldots, n$ για κάθε μία. Άρα το ζητούμενο πλήθος ισούται με

- $$\sum_{k=1}^{n} c(n,k) \cdot 2^{n-k} =$$

$$= 2^n \sum_{k=1}^{n} c(n,k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\underset{\text{Πρότ. 4.4}}{=} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}+n-1\right)$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

**Άσκηση 3.** Για ακεραίους $n, k$ με $0 \leq k \leq n$ ορίζουμε τα πολυώνυμα

$$P_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{n} p(n,k,j)\, x^j$$

όπου $p(n,k,j)$ είναι το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ με $w(1) = k+1$ και $\mathrm{des}(w) = j$. Π.χ. για $n=3$,

$$P_{3,k}(x) = \begin{cases} 1+4x+x^2, & k=0 \\ 4x+2x^2, & k=1 \\ 2x+4x^2, & k=2 \\ x+4x^2+x^3, & k=3. \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$\sum_{m\geq 0} m^k (1+m)^{n-k}\, x^m = \frac{P_{n,k}(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Λύση. Για $k=0$ έχουμε

- $$P_{n,0}(x) = \sum_{\substack{w\in S_{n+1}\\ w(1)=1}} x^{\mathrm{des}(w)}$$

$$= \sum_{w\in S_n} x^{\mathrm{des}(w)}$$

$$= A_n(x)/x$$

και συνεπώς η ζητούμενη ισότη-
τα ταυτίζεται με την Πρόταση
4.6 των διαλέξεων. Για $k \geq 1$

- $$P_{n,k}(x) = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ w(1) = k+1}} x^{\mathrm{des}(w)}$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ w(1) = k+1 \\ w(2) = i+1}} x^{\mathrm{des}(w)}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ w(1)=i+1}} x^{1+\mathrm{des}(w)} \; +$$

$$\sum_{i=k}^{n-1} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ w(1)=i+1}} x^{\mathrm{des}(w)}$$

$$= x \sum_{i=0}^{k-1} P_{n-1,i}(x) + \sum_{i=k}^{n-1} P_{n-1,i}(x).$$

Λαμβάνοντας επισης υπόψην ότι

- $$\sum_{i=0}^{n-1} P_{n-1,i}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ w(1)=i+1}} x^{\mathrm{des}(w)}$$

$$= \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{des}(w)} = P_{n,0}(x)$$

καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση

$$P_{n,k}(x) = P_{n,k-1}(x) + (x-1)\, P_{n-1,k-1}(x) \qquad (*)$$

για $1 \leq k \leq n$. Εφαρμόζοντας επαγωγή στα $n,k$ έχουμε

$$\frac{P_{n,k-1}(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m\geq 0} m^{k-1}(1+m)^{n-k+1}\, x^m$$

$$\frac{P_{n-1,k-1}(x)}{(1-x)^{n}} = \sum_{m\geq 0} m^{k-1}(1+m)^{n-k}\, x^m .$$

Από τις ισότητες αυτές και την (*) έπεται η

$$\frac{P_{n,k}(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m\geq 0} m^{k}(1+m)^{n-k}\, x^m .$$

**Άσκηση 4.** Έστω $h(n)$ το πλήθος των τρόπων να επιλέξει κανείς μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ και να χρωματίσει καθέναν από τους ακεραίους $1, 2, \ldots, n$ άσπρο ή μαύρο, έτσι ώστε το ελάχιστο στοιχείο κάθε κύκλου της $w$ να είναι άσπρο και τουλάχιστον ένα στοιχείο κάθε κύκλου της να είναι μαύρο.

(α) Υπολογίστε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $E_h(x)$.

(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για το $h(n)$.

**Λύση.** **(α)** Για κάθε σύνολο $B \subseteq [n]$ με $\# B = m$ υπάρχουν

$$f(m) = (m-1)!\,(2^{m-1} - 1)$$

τρόποι να διαταχθούν κυκλικά τα στοιχεία του $B$ και να χρωματισθεί το καθένα άσπρο ή μαύρο, έτσι ώστε το ελάχιστο στοιχείο του $B$ να είναι άσπρο και τουλάχιστον ένα στοιχείο του να είναι μαύρο. Σύμφωνα με τον εκθετικό τύπο έχουμε $E_h(x) = \exp E_f(x)$ όπου

• $$E_f(x) = \sum_{m\geq 1} (m-1)!\,(2^{m-1}-1)\frac{x^m}{m!}$$

$$= \sum_{m\geq 1} 2^{m-1}\cdot\frac{x^m}{m} - \sum_{m\geq 1}\frac{x^m}{m}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m\geq 1}\frac{(2x)^m}{m} - \sum_{m\geq 1}\frac{x^m}{m}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-2x} - \log\frac{1}{1-x}$$

$$= \log\frac{1-x}{\sqrt{1-2x}}.$$

Άρα,

$$E_h(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-2x}}.$$

(β) Από το (α) και την ταυτότητα

$$\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

προκύπτει ότι

- $E_h(x) = (1-x) \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n =$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} x^n - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} x^{n+1} =$$

$$1 + \sum_{n\geq 1} \left\{ \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} - \frac{1}{2^{n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \right\} x^n.$$

Άρα,

• $h(n) = n! \left\{ \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} - \frac{1}{2^{n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \right\}$

$$= \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} - n \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$$= (2n-1)!! - n(2n-3)!!$$

για $n \geq 1$, όπου $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.

**Άσκηση 5.** Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_0 = 1$ και

$$a_{n+1} = 2 \sum_{\substack{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3 \\ k_1 + k_2 + k_3 = n}} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

(α) Αν $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$, δείξτε ότι

$$f(x) = 2x\,(1+f(x))^3.$$

(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για το $a_n$.

Λύση. (α)

- $$f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^{n+1}$$

$$= 2 \sum_{n\geq 0} \Big( \sum_{k_1+k_2+k_3=n} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \Big) x^{n+1}$$

$$= 2x \sum_{k_1, k_2, k_3 \geqslant 0} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} x^{k_1+k_2+k_3}$$

$$= 2x \left( \sum_{k \geqslant 0} a_k x^k \right)^3$$

$$= 2x \, (1+f(x))^3 .$$

(β) Από το (α) και το Θεώρημα αντιστροφής Lagrange, με $G(x) = 2(1+x)^3$, παίρνουμε ότι

- $a_n = [x^n] \, f(x)$

$$= \frac{1}{n} [x^{n-1}] \, (G(x))^n$$

$$= \frac{1}{n} [x^{n-1}] \, 2^n (1+x)^{3n}$$

$$= \frac{2^n}{n} \binom{3n}{n-1} = \frac{2^n (3n)!}{n! \, (2n+1)!}$$

$$= \frac{2^n}{2n+1} \binom{3n}{n}.$$

# Συνδυαστική Θεωρία

## Τρίτη Ομάδα Ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Έστω $f_i(m,n)$ το πλήθος των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία 0 ή 1, οι οποίοι έχουν μη μηδενικές γραμμές ή στήλες και άθροισμα στοιχείων ίσο με $i$. Δείξτε ότι

- $$\sum_{i \geq 0} f_i(m,n) t^i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left((1+t)^{n-k} - 1\right)^m .$$

Λύση. Για δοσμένα $m, n, i$ και για $S \subseteq [n]$, έστω $\alpha(S)$ και $\beta(S)$ το πλήθος των $m \times n$ πινάκων $X$ με στοιχεία 0 ή 1 και μη μηδενικές γραμμές, οι οποίοι έχουν άθροισμα στοιχείων ίσο με $i$ και επιπλέον, για $j \in [n]$,

- η $j$-στήλη του $X$ είναι μηδενική για κάθε $i \in S$
- η $j$-στήλη του $X$ είναι μηδενική $\Leftrightarrow j \in S$,

αντίστοιχα. Τότε,

$$\alpha(S) = \sum_{S \subseteq T} \beta(T)$$

για κάθε $S \subseteq [n]$ και $f_i(m,n) = \beta(\emptyset)$. Από την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού συμπεραίνουμε ότι

- $f_i(m,n) = \beta(\emptyset)$

$$= \sum_{T \subseteq [n]} (-1)^{|T|} \alpha(T)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} g_i(m, n-k)$$

όπου $g_i(m,n)$ είναι το πλήθος

των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία 0 ή 1, οι οποίοι έχουν μη μηδενικές γραμμές και άθροισμα στοιχείων ίσο με $i$. Μένει να δείξουμε ότι

$$g_i(m,n) = [t^i]\,((1+t)^n - 1)^m$$

ή, ισοδύναμα, ότι

$$\sum_{i \geq 0} g_i(m,n)\, t^i = ((1+t)^n - 1)^m.$$

Αυτό ισχύει αφού (εξηγήστε γιατί)

- $$\sum_{i\geq 0} g_i(m,n)t^i = \left(\sum_{i\geq 0} g_i(1,n)t^i\right)^m$$
$$= \left((1+t)^n - 1\right)^m.$$

**Άσκηση 2.** Σωστό ή λάθος; Για μερικώς διατεταγμένα σύνολα $P, Q, R, S$:

(α) $P \cong R$ και $Q \cong S \Rightarrow P \times Q \cong R \times S$

(β) $P \times Q \cong R \times S \Rightarrow P \cong R$ και $Q \cong S$

**Λύση.** (α) Σωστό. Αν $\varphi : P \to R$ και $\psi : Q \to S$ είναι ισομορφισμοί μερικώς διατεταγμένων συνόλων, τότε το ίδιο ισχύει για την απεικόνιση

$$\omega : P \times Q \to R \times S$$

με $\omega(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$ για $x \in P$ και $y \in Q$, αφού για $x, x' \in P$ και $y, y' \in Q$,

- $\omega(x, y) \leqslant_{R \times S} \omega(x', y') \Leftrightarrow$

$$(\varphi(x), \psi(y)) \leqslant_{R \times S} (\varphi(x'), \psi(y'))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \leqslant_R \varphi(x') \\ \psi(y) \leqslant_Q \psi(y') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant_P x' \\ y \leqslant_Q y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \leqslant_{P \times Q} (x', y').$$

(β) Λάθος, αφού $P \times Q \cong Q \times P$ για όλα τα $P, Q$. Π.χ.

**Άσκηση 3.** Έστω $P_n$ το σύνολο των κλειστών διαστημάτων στην άλγεβρα Boole $B_n$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού.

(α) Δείξτε ότι το $P_n$ είναι διαβαθμισμένο τάξης $n$.

(β) Δείξτε ότι το $P_n$ έχει $3^n$ στοιχεία και υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση της τάξης του.

Λύση. (α) Ισχύει διότι οι μεγιστικές αλυσίδες του $P_n$ είναι της μορφής

- $[S_1, T_1] \subset [S_2, T_2] \subset \cdots \subset [S_m, T_m]$

$$= [\emptyset, [n]]$$

με $S_1 = T_1$ και

$$\#(T_{k+1} \setminus S_{k+1}) = \#(T_k \setminus S_k) + 1$$

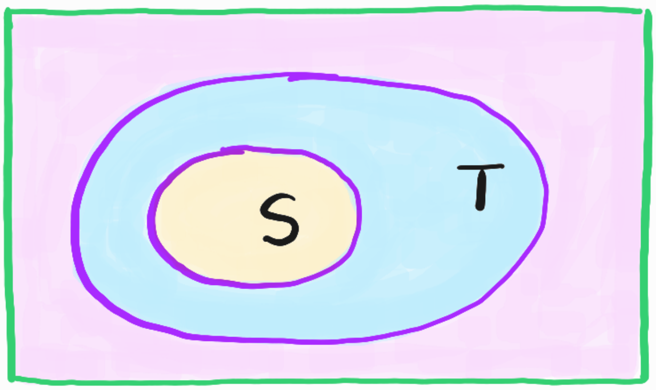
για κάθε $k \in [m-1]$ και συνεπώς έχουν όλες μήκος $m = n$. Π.χ. για

$n=4$ έχουμε την

- $[\{2,4\},\{2,4\}] \subset [\{2\},\{2,4\}] \subset$
  $[\{2\},\{1,2,4\}] \subset [\{2\},\{1,2,3,4\}] \subset$
  $[\emptyset,\{1,2,3,4\}]$.

(β) Όπως προκύπτει από το (α), τα στοιχεία τάξης $k$ του $P_n$ είναι τα διαστήματα $[S,T]$ με $S \subseteq T \subseteq [n]$ και $\#T = \#S + k$. Το πλήθος τους ισούται με $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ διότι για την επιλογή ενός τέτοιου ζεύγους $(S,T)$ υπάρχουν

- $\binom{n}{k}$ επιλογές για τα $k$ στοιχεία του $T \setminus S$ και για κάθε τέτοια
- $2^{n-k}$ επιλογές για τα υπόλοιπα $n-k$ στοιχεία $a \in [n]$, δηλαδή $a \in S$ ή $a \in [n] \setminus T$.

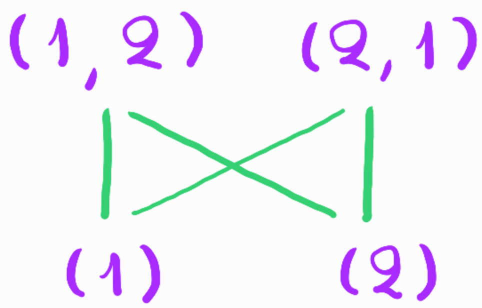
$[n]$ 


Άρα,

- $$F(P_n, y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} y^k$$
$$= (y+2)^n.$$

Ειδικότερα, $\# P_n = F(P_n, 1) = 3^n$.

**Άσκηση 4.** Έστω $Q_n$ το σύνολο των ακολουθιών $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ διακεκριμένων στοιχείων του $[n]$, εφοδιασμένο με τη μερική διάταξη $x \preceq y \Leftrightarrow$ η $x$ είναι υποακολουθία της $y$. Π.χ.

$Q_2 =$ 


(α) Δείξτε ότι το $P_n$ είναι διαβαθμισμένο τάξης $n-1$. Πόσα είναι τα στοιχεία τάξης $k$;

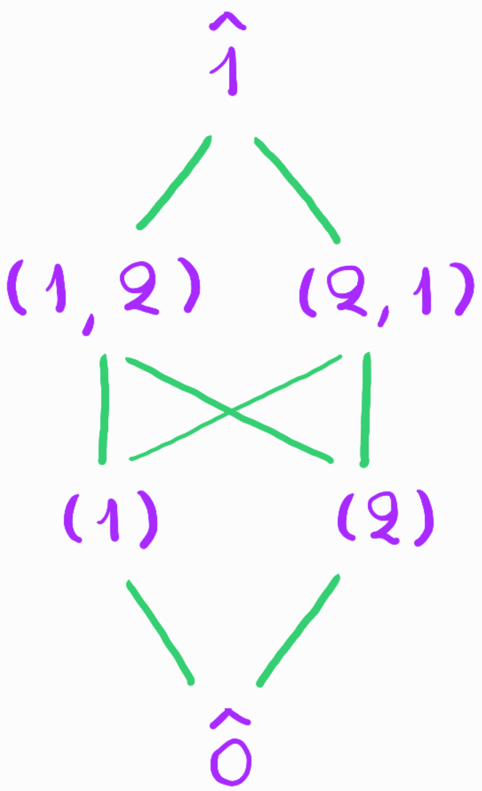
**(β)** Πόσες μεγιστικές αλυσίδες έχει το $Q_n$;

**(γ)** Δείξτε ότι

- $\mu_{\hat{Q}_n}(\hat{0},\hat{1}) = (-1)^{n+1}\, \#\{$μεταθέσεις $w\in\mathfrak{S}_n$ χωρίς σταθερά σημεία$\}$

όπου $\hat{Q}_n = Q_n \sqcup \{\hat{0},\hat{1}\}$. π.χ.

$\hat{Q}_2 =$



**Λύση.** (αβ) Οι μεγιστικές αλυσίδες της $Q_n$ προκύπτουν από καθεμιά από τις $n!$ αναδιατάξεις $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ του $[n]$ διαγράφοντας διαδοχικά ένα ένα τα στοιχεία $\sigma_i$ με $n!$ τρόπους. Άρα, έχουν όλες μήκος $n-1$ και το πλήθος τους ισούται με $(n!)^2$.

Για $n=4$ έχουμε πχ την $(2,4,1,3) > (2,4,1) > (2,1) > (2)$.

Τα στοιχεία τάξης $k-1$ της $Q_n$ είναι οι ακολουθίες $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ διακεκριμένων στοιχείων του $[n]$, το πλήθος των οποίων ισούται με $n(n-1)\cdots(n-k+1) = n!/(n-k)!$

(γ) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \hat{Q}_n \setminus \{\hat{1}\}$ τάξης $k$, το κλειστό διάστημα $[\hat{0}, x]$ είναι ισόμορφο με την άλγεβρα Boole $B_k$ (εξηγήστε γιατί), οπότε $\mu_{\hat{Q}_n}(\hat{0}, x) = (-1)^k$. Κατά συνέπεια, από τον ορισμό της συνάρτησης Möbius συμπεραίνουμε ότι

- $$\mu_{\hat{Q}_n}(\hat{0}, \hat{1}) = -\sum_{\substack{x \in \hat{Q}_n \\ x \neq \hat{1}}} \mu_{\hat{Q}_n}(\hat{0}, x)$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

$= (-1)^{n+1} \# \{$ μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_n$ χωρίς σταθερά σημεία $\}$.

**Άσκηση 5.** Θεωρούμε αντιαλυσίδες $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ με $a_1, a_2, \ldots, a_m$ στοιχεία, αντίστοιχα, και το διατακτικό άθροισμα

$$P = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_m$$

Υπολογίστε το $\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1})$, όπου $\hat{P} = P \sqcup \{\hat{0},\hat{1}\}$.

Λύση. Ας εφαρμόσουμε το θεώρημα του P. Hall. Για $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ υπάρχουν $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ αλυσίδες στο $P$ τα στοιχεία των οποίων έχουν τάξεις $i_1 - 1, i_2 - 1, \ldots, i_k - 1$. Επομένως,

$$\bullet\ \mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} (-1)^{k-1} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$$

$$= (-1)^{m-1} (a_1 - 1)(a_2 - 1) \cdots (a_m - 1).$$

# Συνδυαστική Θεωρία
## Τέταρτη Ομάδα Ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Δίνεται τοπικά πεπερασμένο και διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο $P$. Αν $f, g \in I(P)$ με

- $f(x,y) = (-1)^{\rho(x,y)}$
- $g(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} (-1)^{\rho(z,y)} \mu_P(x,z)$

για $x, y \in P$ με $x \leq y$, όπου $\rho(x,y)$ είναι η τάξη του $[x,y]$, υπολογίστε τις $f^{-1}, g^{-1} \in I(P)$.

**Λύση.** Θεωρούμε την $h \in I(P)$ με

$$h(x,y) = (-1)^{\rho(x,y)} \mu_P(x,y)$$

για $x, y \in P$ με $x \leq y$. Υπολογίζουμε ότι

- $$(fh)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)\, h(z,y)$$

$$= \sum_{x \leq z \leq y} (-1)^{\rho(x,z)} (-1)^{\rho(z,y)} \mu_P(z,y)$$

$$= \sum_{x \leq z \leq y} (-1)^{\rho(x,y)} \mu_P(z,y)$$

$$= (-1)^{\rho(x,y)} \sum_{x \leq z \leq y} \mu_P(z,y)$$

$$= (-1)^{\rho(x,y)} \quad \delta_p(x,y) = \delta_p(x,y)$$

$$= \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x < y \end{cases}$$

και συνεπώς $f^{-1} = h$. Παρατηρούμε επίσης ότι $g = \mu_p \cdot f \in I(P)$, οπότε

$$g^{-1} = (\mu_p \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot \mu_p^{-1} = h \cdot \zeta_p$$

στη $I(P)$, δηλαδή

- $$g^{-1}(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} h(x,z)\,\zeta_p(z,y)$$

$$= \sum_{x \leq z \leq y} h(x,z)$$

$$= \sum_{x \leq z \leq y} (-1)^{\rho(x,z)} \mu_P(x,z)$$

για $x, y \in P$ με $x \leq y$.

Άσκηση 2. Έστω $Q_n$ το σύνολο των κλειστών διαστημάτων στην άλγεβρα Boole $B_n$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού (όπου $\varnothing \in Q_n$).

(α) Δείξτε ότι το $Q_n$ είναι σύνδεσμος.

(β) Υπολογίστε το $\mu_{Q_n}(\hat{0}, \hat{1})$, όπου $\hat{0} = \varnothing$ και $\hat{1} = 2^{[n]}$.

Λύση. (α) Το $Q_n$ έχει ελάχιστο

στοιχείο $\hat{0} = \varnothing$ και δύο οποιαδήποτε μη κενά κλειστά διαστήματα $[S,T]$ και $[U,V]$ στη $B_n$ έχουν κατώτατο άνω φράγμα

$$[S,T] \vee [U,V] = [S \cap U, T \cup V]$$

στο $Q_n$ αφού για $X \subseteq Y \subseteq [n]$,

$$\begin{cases} [S,T] \subseteq [X,Y] \\ [U,V] \subseteq [X,Y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \subseteq S, \; T \subseteq Y \\ X \subseteq U, \; V \subseteq Y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X \subseteq S, \; X \subseteq U \\ T \subseteq Y, \; V \subseteq Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \subseteq S \cap U \\ T \cup V \subseteq Y. \end{cases}$$

(β) Για κάθε μη κενό $x = [S,T] \in Q_n$ το κλειστό διάστημα $[x, \hat{1}]$ του $Q_n$ είναι ισόμορφο με την άλγεβρα Boole τάξης $n-|T|+|S|$ αφού για $X \subseteq Y \subseteq [n]$,

- $[S,T] \subseteq [X,Y] \Leftrightarrow \begin{cases} X \subseteq S \\ T \subseteq Y \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \subseteq S \\ [n] \setminus T \subseteq [n] \setminus Y. \end{cases}$$

Κατά συνέπεια $\mu_{Q_n}(x, \hat{1}) = (-1)^{n-k}$, όπου $k = |T \setminus S|$ είναι η τάξη του $x$ στο $Q_n - \{\hat{0}\}$. Αφού υπάρχουν ακριβώς $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ στοιχεία τάξης $k$ στο $Q_n - \{\hat{0}\}$, από τη (10.2) των διαλέξεων συμπεραίνουμε ότι

• $$\mu_{Q_n}(\hat{0},\hat{1}) = -\sum_{x\in Q_n-\{\hat{1}\}} \mu_{Q_n}(x,\hat{1})$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^{n-k}$$

$$= -(1-2)^n = (-1)^{n+1}.$$

Άσκηση 3. Σωστό ή λάθος;

(α) Αν $L$ είναι πεπερασμένος upper semimodular σύνδεσμος και το $x \in L$ είναι ίσο με το κατώτατο άνω φράγμα κάποιων ατόμων του $L$, τότε $\mu_L(\hat{0},x) \neq 0$.

(β) Ομοίως για lower semimodular συνδέσμους $L$.

Λύση. (α) Σωστό. Από το θεώρημα NBC γνωρίζουμε ότι

$$(-1)^{\rho(x)} \mu_L(\hat{0}, x) = \# NBC(x),$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $NBC(x) \neq \emptyset$, δηλαδή ότι υπάρχει τουλάχιστον μία NBC βάση του $x$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει τουλάχιστον μία βάση του $x$. Πράγματι, αν $E$ είναι το σύνολο των ατόμων του $L$, θεωρούμε ελαχιστικό $S \subseteq E$ με $\vee S = x$. Το $S$ είναι ανεξάρτητο, άρα βάση του $x$, διότι διαφορετικά θα περιείχε κύκλωμα $C$ και θα είχαμε

$$V(S-\{a\}) = VS = x$$

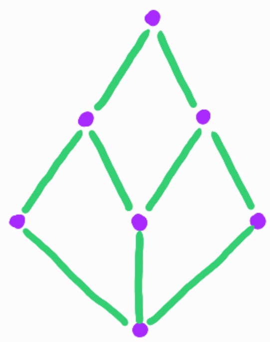
για κάθε $a \in C$.

Από όλες τις βάσεις του $x$ θεωρούμε τη λεξικογραφικά μικρότερη, έστω $S$, ως προς την ολική διάταξη $<_\omega$ του $E$, και παρατηρούμε ότι αυτή είναι NBC. Πράγματι, αν η $S$ περιείχε σπασμένο κύκλωμα $C\setminus\{a\}$, όπου $a \in C$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του κυκλώματος $C$ ως προς την $<_\omega$, τότε

$$V(C\setminus\{a\}) = V(C\setminus\{b\})$$

για κάθε $b \in C\setminus\{a\}$ και συνεπώς το $(S\setminus\{b\})\cup\{a\}$ θα ήταν βάση του $x$ λεξικογραφικά μικρότερη της $S$.

(β) Λάθος. Αντιπαράδειγμα είναι π.χ. το

$L =$ 

**Άσκηση 4.** Υπολογίστε το πλήθος των περιοχών του παρατάγματος των γραμμικών υπερεπιπέδων του $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x_i = 0, & 1 \le i \le n \\ x_i - x_j = 0, & 1 \le i < j \le n. \end{cases}$$

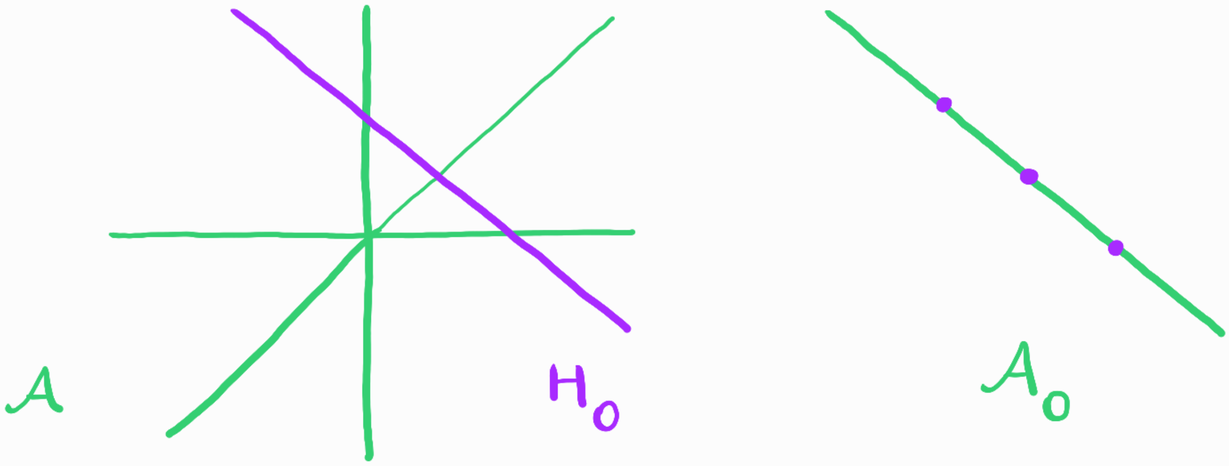
**Λύση.** Εφαρμόζοντας το σκεπτικό στο Παράδειγμα 12.10 (β) των διαλέξεων βρίσκουμε ότι οι περιοχές βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τα $n+1$ αντικείμενα $x_1, x_2, \dots, x_n, 0$ και συνεπώς ότι το πλήθος τους ισούται με $(n+1)!$.

**Άσκηση 5.** Δίνεται ουσιώδες παράταγμα $\mathcal{A}$ γραμμικών υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^n$ και αφφινικό υπερεπίπεδο $H_0$ του $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται σε γενική θέση ως προς το $\mathcal{A}$. Δείξτε ότι το πλήθος των φραγμένων περιοχών του παρατάγματος

$$\mathcal{A}_0 = \{ H_0 \cap H : H \in \mathcal{A} \}$$

στο χώρο $H_0$ ισούται με $|\mu_{L_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, \hat{1})|$, όπου $\hat{0} = \mathbb{R}^n$ και $\hat{1} = \{0\}$.

**Λύση.** Αφού το $H_0$ βρίσκεται σε γενική θέση ως προς το $\mathcal{A}$, η απεικόνιση




$$\varphi : \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \setminus \{\hat{1}\} \to \mathcal{L}_{\mathcal{A}_0}$$
$$X \rightsquigarrow X \cap H_0,$$

δηλαδή με $\varphi(X) = X \cap H_0$ για $X \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \setminus \{\hat{1}\}$, είναι ισομορφισμός μερικώς διατεταγμένων συνόλων (παραλείπουμε την επαλήθευση). Άρα,

- $b(\mathcal{A}_0) = \left| \sum_{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_0}} \mu_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}_0}}(\hat{0}, x) \right|$

$$= \left| \sum_{\substack{x \in \mathcal{L}_A \\ x \neq \hat{1}}} \mu_{\mathcal{L}_A}(\hat{0}, x) \right|$$

$$= \left| - \sum_{\substack{x \in \mathcal{L}_A \\ x \neq \hat{1}}} \mu_{\mathcal{L}_A}(\hat{0}, x) \right|$$

$$= |\mu_{\mathcal{L}_A}(\hat{0}, \hat{1})| .$$

# Συνδυαστική Θεωρία
## Πέμπτη Ομάδα Ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Υπάρχει παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{A}$ στον $\mathbb{R}^4$ τέτοιο ώστε

$$\chi(\mathcal{A}, q) = q^4 - 5q^3 + 9q^2 - 9q + 5\,;$$

**Λύση.** Όχι. Από τον ορισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου έχουμε

$$[q^3]\,\chi(\mathcal{A}, q) = -(\#\mathcal{A})$$

και συνεπώς ένα τέτοιο παράταγμα θα είχε πέντε υπερεπίπεδα.

Αφού το $\chi(\mathcal{A},q)$ παίρνει μη μηδενικές τιμές για $q=0$ και $q=1$, το $\mathcal{A}$ είναι ουσιώδες και

$$\bigcap_{H\in\mathcal{A}} H = \emptyset.$$

Από αυτά τα δεδομένα έπεται ότι $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \cong B_5 \setminus \{\hat{1}\}$ και συνεπώς θα έπρεπε να ήταν

- $$\begin{aligned}\chi(\mathcal{A},q) &= \chi(B_5\setminus\{\hat{1}\},q) \\ &= q^4 - 5q^3 + 10q^2 - 10q + 5.\end{aligned}$$

**Άσκηση 2.** Για ακεραίους $1 \leq k \leq n$ συμβολίζουμε με $\mathcal{B}_{n,k}$ το παράτα-

γμα των αφφινικών υπερεπιπέ-
δων του $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις
εξισώσεις

$$\begin{cases} x_i = 0, & 1 \leq i \leq n \\ x_i - x_j = 0, & 1 \leq i < j \leq n \\ x_i + x_j = 0, & 1 \leq i < j \leq n \\ x_i + x_j = 1, & 1 \leq i < j \leq k. \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε το χαρακτηριστικό
πολυώνυμο του $\mathcal{B}_{n,k}$.

(β) Υπολογίστε το πλήθος των πε-
ριοχών και το πλήθος των φρα-
γμένων περιοχών του $\mathcal{B}_{n,k}$.

Λύση. (α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 12.22 των διαλέξεων. Για αρκετά μεγάλο περιττό $q = 2p+1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ διατάσσουμε τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_q \setminus \{0\}$ ως

$$1 < -1 < 2 < -2 < \cdots < p < -p. \quad (*)$$

Έστω τώρα $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_q^n$. Για να έχουμε

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M_{\mathcal{B}_{n,k}}(q)$$

θα πρέπει τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ να είναι $k$ διακεκριμένα και ανά δύο μη διαδοχικά στοιχεία της $(*)$.

Επομένως, υπάρχουν $k!\binom{q-k}{k}$ επιλογές για τα $x_1, x_2, \dots, x_k$ και, κατά το συνήθη σκεπτικό,

$$\prod_{i=k}^{n-1} (q-2i-1)$$

επιλογές για τα $x_{k+1}, \dots, x_n$. Επομένως,

$$\chi_{\mathcal{B}_{n,k}}(q) = \prod_{i=k}^{2k-1} (q-i) \prod_{i=k}^{n-1} (q-2i-1).$$

(β) Από το (α) και το Θεώρημα 12.11 των διαλέξεων έπεται ότι

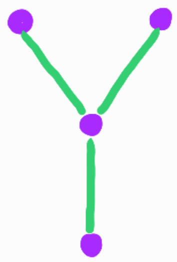
$$r(\mathcal{B}_{n,k}) = 2^{n-k}\, n!\binom{2k}{k}$$

και

$$b(\mathcal{B}_{n,k}) = 2^{n-k}(k-1)(n-1)!\binom{2k-2}{k-1}.$$

Άσκηση 3. Σωστό ή λάθος; Αν $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ και $P$ είναι πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο με $Z(P,m) = m^d$, τότε $P \cong B_d$.

Λύση. Λάθος. Αν $Z(P,m) = m^2$, τότε $\#P = Z(P,2) = 4$. Επιπλέον, το $P$ έχει τάξη 2 και δύο μεγιστικές αλυσίδες (Θεώρημα 13.2 των διαλέξεων). Δοκιμάζοντας μερικές διατάξεις με αυτά τα χαρακτηριστικά βρίσκουμε την

$P =$ 

με $Z(P, m) = m^2$ και προφανώς $P \not\cong B_2$.

Άσκηση 4. Για αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα $\Gamma, \Delta$ με ξένα σύνολα κορυφών θέτουμε

$$\Gamma * \Delta = \{ F \cup G : F \in \Gamma, G \in \Delta \}.$$

(α) Δείξτε ότι

$$h(\Gamma * \Delta, x) = h(\Gamma, x)\, h(\Delta, x).$$

(β) Υπολογίστε το $h(\Delta(P), x)$ αν $P = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_m$ και $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ είναι αντιαλυσίδες με $a_1, a_2, \ldots, a_m$ στοιχεία, αντίστοιχα.

Λύση. (α) Παρατηρούμε ότι

- $$f(\Gamma * \Delta, x) = \sum_{\substack{F \in \Gamma, \\ G \in \Delta}} x^{|F \cup G|}$$

$$= \sum_{\substack{F \in \Gamma, \\ G \in \Delta}} x^{|F| + |G|}$$

$$= \left( \sum_{F \in \Gamma} x^{|F|} \right) \left( \sum_{G \in \Delta} x^{|G|} \right)$$

$$= f(\Gamma, x) f(\Delta, x)$$

και συμπεραίνουμε, αν $\dim(\Gamma) = n-1$ και $\dim(\Delta) = m-1$, ότι

- $h(\Gamma * \Delta, x) =$

$$= (1-x)^{m+n} f\left(\Gamma * \Delta, \frac{x}{1-x}\right)$$

$$= (1-x)^{m} f\left(\Gamma, \frac{x}{1-x}\right) \cdot$$

$$(1-x)^{n} f\left(\Delta, \frac{x}{1-x}\right)$$

$$= h(\Gamma, x)\, h(\Delta, x).$$

(β) Παρατηρούμε ότι $\Delta(P) = \Delta(Q_1) * \Delta(Q_2) * \cdots * \Delta(Q_m)$ και συμπεραίνουμε, λόγω του (α), ότι

- $$h(\Delta(P), x) = \prod_{i=1}^{m} h(\Delta(Q_i), x) = \prod_{i=1}^{m} (1 + (a_i - 1)x).$$

Ειδικότερα,

- $$(-1)^{m-1} \mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^{m-1} \tilde{\chi}(\Delta(P)) = h_m(\Delta(P)) = \prod_{i=1}^{m} (a_i - 1).$$

Άσκηση 5. Το ζεύγμα μιας πλευράς $F$ ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος $\Delta$ ορίζεται ως

$$\mathrm{link}_{\Delta}(F) = \{ G \setminus F : F \subseteq G \in \Delta \}.$$

Σωστό ή λάθος;

(α) Αν το $\Delta$ είναι αγνό και αποφλοιώσιμο, τότε το ίδιο ισχύει για το $\mathrm{link}_{\Delta}(F)$ για κάθε $F \in \Delta$.

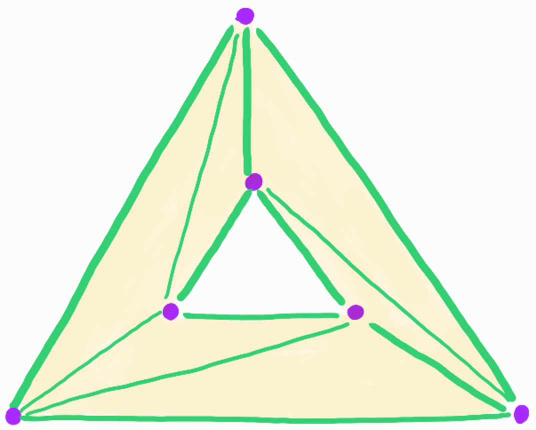
(β) Αν το $\mathrm{link}_{\Delta}(F)$ είναι αγνό και αποφλοιώσιμο για κάθε $F \in \Delta \setminus \{\emptyset\}$, τότε το ίδιο ισχύει για το $\Delta$.

(γ) Αν το $\Delta$ είναι συνεκτικό και το $\mathrm{link}_{\Delta}(F)$ είναι αγνό και αποφλοιώσιμο για κάθε $F \in \Delta \setminus \{\emptyset\}$, τότε το ίδιο ισχύει για το $\Delta$.

**Λύση.** **(α)** Σωστό. Οι έδρες του $\mathrm{link}_\Delta(F)$ είναι τα σύνολα της μορφής $G \setminus F$, όπου $G$ είναι έδρα του $\Delta$ που περιέχει το $F$. Κατά συνέπεια, το $\mathrm{link}_\Delta(F)$ είναι αγνό διάστασης $\dim(\Delta) - |F|$.

Επιπλέον, κάθε αποφλοίωση του $\Delta$ επάγει μια ολική διάταξη του συνόλου των εδρών του $\Delta$ που περιέχουν το $F$, άρα και των εδρών του $\mathrm{link}_\Delta(F)$. Εφαρμόζοντας την Παρατήρηση 15.3 των διαλέξεων βρίσκουμε ότι η διάταξη αυτή είναι αποφλοίωση του $\mathrm{link}_\Delta(F)$.

(βγ) Λάθος. Το σύμπλεγμα

$\Delta =$ 

διάστασης 2, με $f_0(\Delta) = 6$, $f_1(\Delta) = 12$, $f_2(\Delta) = 6$, άρα με $h(\Delta, x) = 1 + 3x + 3x^2 - x^3$, ικανοποιεί τις δοσμένες συνθήκες αλλά δεν είναι αποφλοιώσιμο αφού $h_3(\Delta) < 0$.