

Ασκήσεις Β

- Έστω G ομάδα και X μια κλάση συζυγίας (μη τετριμένων) στοιχείων της G .
 - Δείξτε ότι $\langle X \rangle \triangleleft G$.
 - Έστω $\vartheta \in \text{Aut}(G)$. Δείξτε ότι το $\vartheta(X)$ είναι μια κλάση συζυγίας της G .
 - Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η G είναι πεπερασμένη μη αβελιανή απλή ομάδα και ότι για κάθε άλλη κλάση συζυγίας Y της G είτε $|Y| \neq |X|$, είτε τα στοιχεία των X και Y έχουν διαφορετικές τάξεις, δείξτε ότι η ομάδα $\text{Aut}(G)$ εμφυτεύεται στην S_X .

Το τελευταίο ερώτημα είναι φορτωμένο με πολλές υποθέσεις. Παρ' όλα αυτά το συμπέρασμα έχει την σημασία του.
- Μια ομάδα G ονομάζεται **τέλεια** αν δεν υπάρχει μη τετριμένη γνήσια κανονική υποομάδα της, έστω K , με το πηλίκο G/K να είναι αβελινή ομάδα.

Έστω G τέλεια ομάδα και K κυκλική κανονική υποομάδα της. Δείξτε ότι $K \leq Z(G)$.
- Έστω G πεπερασμένη ομάδα και p ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης της τάξης της G . Υποθέτουμε ότι K είναι μια κανονική υποομάδα της G τάξης p . Δείξτε ότι $K \leq Z(G)$.
- Έστω G ομάδα και $x \in G$ με την ιδιότητα $C_G(x) \triangleleft G$. Δείξτε ότι υπάρχει αβελιανή κανονική υποομάδα της G , στην οποία περιέχεται το x . Δείξτε (με ένα αντιπαράδειγμα), ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.
- Δείξτε ότι μια ομάδα G είναι ισόμορφη με την άπειρη διεδρική D_∞ αν και μόνο αν έχει μια γνήσια υποομάδα H , η οποία είναι άπειρη κυκλική ($H = \langle h \rangle$) και $C_G(h^n) = H$, για κάθε θετικό ακέραιο n .

(Υποτίθεται ότι γνωρίζουμε στοιχειωδώς την άπειρη διεδρική ομάδα.
- Έστω p ένας περιττός πρώτος.
 - Δείξτε ότι η πολλαπλασιαστική ομάδα $U(\mathbb{Z}_p)$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο τάξης 2.
 - Δείξτε ότι μια ομάδα G τάξης $2p$ είναι είτε κυκλική, είτε ισόμορφη με την διεδρική D_{2p} .
- Έστω G ομάδα και $\text{Inn}(G)$ η ομάδα των εσωτερικών αυτομορφισμών της. Δείξτε ότι ένας αυτομορφισμός φ της G ανήκει στην $C_{\text{Aut}(G)}(\text{Inn}(G))$ αν και μόνο αν $\varphi(g) \cdot g^{-1} \in Z(G)$ για κάθε $g \in G$.

Ένας τέτοιος αυτομορφισμός ονομάζεται **κεντρικός** αυτομορφισμός.

Αποδείξτε ότι αν $Z(G) = 1$ τότε $Z(\text{Aut}(G)) = 1$.

Ισχύει το αντίστροφο;
- Έστω K μια πεπερασμένη κανονική υποομάδα της ομάδας G και P μια κανονική p -Sylow υποομάδα της K . Δείξτε ότι η P είναι κανονική στην G .
- Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $H \leq G$. Αν P_0 είναι μια p -Sylow υποομάδα της H και P μια p -Sylow υποομάδα της G με $P_0 \leq P$, δείξτε ότι $P_0 = P \cap H$.
- Έστω G πεπερασμένη ομάδα και H, K κανονικές υποομάδες της G . Αν P είναι μια p -Sylow υποομάδα της G , δείξτε ότι $(PH) \cap (PK) = P(H \cap K)$.

-
11. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και H, K υποομάδες της G έτσι ώστε $G = HK$. Δείξτε ότι αν και οι δύο υποομάδες H και K είναι κανονικές στην G , τότε για κάθε P p -Sylow υποομάδα της G ισχύει $P = (P \cap H)(P \cap K)$.

Δείξτε, με ένα αντιπαράδειγμα, ότι αν δεν είναι και οι δύο κανονικές υποομάδες, τότε το συμπέρασμα δεν ισχύει.

Παρ' όλα ταύτα δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια P p -Sylow υποομάδα της G ώστε να ισχύει $P = (P \cap H)(P \cap K)$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προ-προηγούμενη άσκηση.

12. Υποθέτουμε ότι η ομάδα G έχει τις κανονικές υποομάδες L, J, H με $L < J < H$ και $|H/J| = p$, $|J/L| = q$, όπου p, q πρώτοι με $p > q$. Δείξτε ότι υπάρχει K κανονική υποομάδα της G με $L < K < H$ και $|H/K| = q$, $|K/L| = p$.
13. Δείξτε ότι κάθε ομάδα G τάξης 255 είναι κυκλική.