## Ασκήσεις Δ

1. Δείξτε ότι μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ είναι ελεύθερη στρέψης.

   Είδικότερα, δείξτε ότι αν $1 \neq w \in F$ , τότε $| w | < | w^2 | < | w^3 | < \cdots$.

2. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ και $v, w \in F$ με $v \cdot w = w \cdot v$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in F$ με την ιδιότητα $v = u^n$, $w = u^m$, όπου $n, m \in \mathbb{Z}$.

3. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ και $v, w \in F$ με $v^n \cdot w^m = w^m \cdot v^n$. Δείξτε ότι $v \cdot w = w \cdot v$ και άρα υπάρχει $u \in F$ με την ιδιότητα $v = u^n$, $w = u^m$, όπου $n, m \in \mathbb{Z}$.

4. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$. Δείξτε ότι η κεντροποιούσα ένος μη τετριμένου στοιχείου της είναι άπειρη κυκλική.

   Κατά συνέπεια το κέντρο μια ελεύθερης ομάδας είναι τετριμμένο, εκτός και αν είναι η άπειρη κυκλική.

5. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ και $1 \neq w \in F$. Δείξτε ότι η κανονικοποιούσα της κυκλικής ομάδας $\langle w \rangle$ είναι άπειρη κυκλική.

6. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$. Δείξτε ότι η μεταθετικότητα είναι μεταβατική. Δηλαδή αν $vw = wv$ και $wu = uw$, τότε $vu = uv$.

   Δώστε ένα παράδειγμα ομάδας όπου η μεταθετικότητα δεν είναι μεταβατική.

7. Έστω $G$ μια ομάδα, δείξτε ότι κάθε στοιχείο της μορφής $aba^{-1}b^{-1}$ με $a, b \in G$ είναι γινόμενο τετραγώνων.

8. Έστω $G$ ομάδα και $X$ ένα σύνολο γεννητόρων της. Έστω $\mathrm{K} = \langle g^2 \mid g \in G \rangle$ και $H = \langle xyx^{-1}y^{-1}, z^2 \mid x, y, z \in X \rangle^G$. Δείξτε ότι $\mathrm{K} = H$.

9. Έστω $G$ μια ομάδα με $n$ το πλήθος γεννήτορες και $r$ το πλήθος ορίζουσες σχέσεις. Υποθέτουμε ότι $r < n$, δείξτε ότι η $G$ είναι άπειρη ομάδα.

10. Έστω $G$ και $N \lhd G$. Υποθέτουμε ότι το πηλίκο $G/N$ είναι ελεύθερη ομάδα. Δείξτε ότι υπάρχει $F$ ελεύθερη υποομάδα της $G$ ώστε η $G$ να διασπάται επί της $N$ δια της $F$.

11. *Ορισμός*. Μια ομάδα $P$ θα ονομάζεται προβολική αν για κάθε επιμορφισμό (τυχαίων) ομάδων $\beta : G \longrightarrow H$ και κάθε $\alpha : P \longrightarrow H$ ένας ομομορφισμό ομάδων, υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\gamma : P \longrightarrow G$, ώστε $\beta\gamma = \alpha$.

    Θα δούμε ότι αυτή η ιδιότητα είναι ”ισοδύναμη” με τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας.

    Προφανώς, κάθε ελεύθερη ομάδα είναι προβολική (Πρόταση 0.1.5).

    ”Αντίστροφα”, έστω $P$ μια προβολική ομάδα. Στην θέση της ομάδας $H$ λαμβάνουμε την την $P$ και στη θέση του ομομορφισμού $\alpha$ τον ταυτοτικό. Επίσης, επειδή η $P$ μπορεί να θεωρηθεί ωα πηλίκο μιας ελεύθερης ομάδας, στην θέση της $G$ λαμβάνουμε μια ελεύθερη ομάδα , έστω $F$, της οποίας πηλίκο είναι η $P$ και $\beta$ τον αντίστοιχο επιμορφισμό. Τότε θα έχουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\gamma : P \longrightarrow F$, ώστε $\beta\gamma = \alpha = 1_P$. Άρα η $\gamma$ είναι αναγκαστικά 1-1. Οπότε υπάρχει υποομάδα, έστω $R$, της $F$ ισόμορφη με την $P$ ($R = \gamma(P)$). Τότε, επειδή $F/N \approx P$, ($N$ είναι ο $ker\beta$) έχουμε ότι $N \cap R = 1$ και συνεπώς η $F$ είναι μια διασπαστική επέκταση επί της $N$ δια της $R = \gamma(P)$, η οποία είναι ισόμορφη με την $P$.

    Άρα αποδείξαμε ότι η $P$ είναι μια αναίρεση μιας ελεύθερης ομάδας.

    Για τους ισοδύναμους ορισμούς της αναίρεσης βλέπε την άσκηση 8 στην ομάδα ασκήσεων Γ.

12. Έστω $F$ ελεύθερη ομάδα και $H$ υποομάδα της πεπερασμένου δείκτη. Δείξτε ότι για κάθε άλλη μη τερτιμμένη υποομάδα της $F$ η τομή της με την $H$ είναι μη τετριμμένη.