Ασκήσεις Ε

1. Έστω G ομάδα με μια συνθετική σειρά $1 = G_1 \lhd G_2 \lhd \cdots \lhd G_n = G$. Υποθέτουμε ότι όλα τα ενδιάμεσα πηλίκα είναι μη ισόμορφα μεταξύ τους ($G_i/G_{i+1} \not\approx G_j/G_{j+1}$ για $i \neq j$). Δείξτε ότι:

   (α΄) Δύο διαφορετικές κανονικές υποομάδες της G δεν είναι ισόμορφες.

   (β΄) Κάθε κανονική υποομάδα της G είναι χαρακτηριστική.

   (γ΄) Κάθε υποκανονική υποομάδα της G είναι κανονική.

2. Έστω G ομάδα και H, K κανονικές υποομάδες της G με $G = HK$. Υποθέτουμε ότι η G έχει μια συνθετική σειρά. Δείξτε ότι κάθε πηλίκο της σειράς αυτής είναι ισόμορφο με το πηλίκο μιας συνθετικής σειράς της H, ή με το πηλίκο μιας συνθετικής σειράς της K.

   Στην περίπτωση, όπου πηλίκο μιας συνθετικής σειράς της H δεν είναι ισόμορφο με κάθε πηλίκο μιας συνθετικής σειράς της K, δείξτε ότι $G = H \times K$.

3. Έστω G ομάδα και $H, K \leq G$ με $G = \langle H, K \rangle$.

   Υποθέτουμε ότι οι H και K είναι πεπερασμένες και η μια εκ των δύο είναι υποκανονική στην G. Δείξτε ότι η G είναι πεπερασμένη.

   Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα, όπου ενώ και οι δύο υποομάδες H και K είναι πεπερασμένες η $G = \langle H, K \rangle$ δεν είναι πεπερασμένη;

4. Έστω D_{2n} η διεδρική ομάδα τάξης $2n$. Δείξτε ότι η D_{2n} είναι επιλύσιμη.

   Δώστε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η D_{2n} να είναι μηδενοδύναμη.

   Να βρεθεί μια επιλύσιμη συνθετική σειρά της D_{2n} και μιά κεντρική σειρά της.

5. Έστω n ένας άρτιος φυσικός αριθμός με την ιδιότητα κάθε ομάδα με τάξη ίση με n να είναι μηδενοδύναμη. Δείξτε ότι ο n είναι δύναμη του 2.

6. Δείξτε ότι οι ομάδες $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ και $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ είναι επιλύσιμες.

   Να βρεθούν επιλύσιμες σειρές τους.

   Σημείωση: Στην πραγματικότητα είναι οι μόνες $GL_n(\mathbb{F}, n \geq 2$, όπου $\mathbb{F}$ σώμα, οι οποίες είναι επιλύσιμες.
   Η απόδειξη της μη επιλυσιμότητας αυτών των ομάδων δεν είναι τόσο προφανής, αλλά αναζητήστε την.
   Παρ' όλα ταύτα, αν το σώμα είναι χαρακτηριστικής μηδέν, η απόδειξη είναι προφανέστατη.

7. Έστω G ομάδα και H μέγιστη επιλύσιμη υποομάδα της G (δηλαδή δεν υπάρχει επιλύσιμη υποομάδα της G, η οποία να περιέχει γνησίως την H). Δείξτε ότι $N_G(H) = H$.

   Συνεπώς, αν H είναι κανονική και μέγιστη επιλύσιμη υποομάδα της G, τότε η G είναι επιλύσιμη.

8. Έστω $H \leq G$. Δείξτε ότι $H^G G' = HG'$, όπου H^G είναι η κανονική θήκη της H στην G.

   Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η G είναι επιλύσιμη, δείξτε ότι $H^G = G$ αν και μόνο $HG' = G$.

9. Έστω G πεπερασμένη ομάδα με $\mid G \mid = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{m_k}$, όπου p_i διακεκριμένοι πρώτοι. Δείξτε ότι η G είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν το μήκος κάθε συνθετικής σειρά της G ισούται με $\sum_{i=1}^{n} m_i$.

10. Έστω G πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα. Δείξτ ότι κάθε ελάχιστη κανονική υποομάδα της είναι στοιχειώδης αβελιανή και χαρακτηριστικη στην G.

11. Έστω G επιλύσιμη ομάδα. Δείξτε ότι η G έχει συνθετικές σειρές αν και μόνο αν είναι πεπερασμένη.

12. Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Δείξτε ότι η G δεν είναι επιλύσιμη αν και μονο αν περιέχει μια κανονική μη τετριμμένη υποομάδα H με $H = H'$.

    (Επίσης δείξτε ότι στην μια κατεύθυνση μπορούμε να αντικαταστήσουμε την απαίτηση 'κανονική μη τετριμμένη υποομάδα H με $H = H'$' με την "ασθενέστερη" 'τυχαία μη τετριμμάνη υποομάδα H με $H = H'$.)

13. Δείξτε την ισοδυναμία των δύο προτάσεων:

    α) Κάθε πεπερασμένη (μη αβελιανή) απλή ομάδα έχει άρτια τάξη.

    β) Κάθε πεπερασμένη ομάδα περιττής τάξης είναι επιλύσιμη.

    Σημείωση: Υπάρχει το περίφημο Θεώρημα των Feit - Thomson, ότι όλες οι πεπερασμένες ομάδες περιττής τάξης είναι επιλύσιμες.
    Επομένως, αν κάποιος αποδείξει την ισχύ του α) (ανεξάρτητα) έχει αποδείξει το Θεώρημα των Feit - Thomson με άλλο τρόπο. Αυτό έχει επιτευχθεί και έχουν δοθεί συντομότερες αποδείξεις του Θεωρήματος αυτού, δεδομένου ότι η αρχική απόδειξη ήταν άνω των 270 σελίδων.

    Πριν συνεχίσουμε όρισμένα προκαταρκτικά.

    Όταν έχουμε μια ομάδα G και $A_1, \mathrm{A}_2 \subseteq G$, είχαμε ορίσει $[A_1, \mathrm{A}_2] = \langle [a, b] \mid a \in A_1,\, b \in \mathrm{A}_2 \rangle$.

    Αν τώρα έχουμε $A_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3 \subseteq G$, τότε ορίζουμε $[A_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3] = [[A_1, \mathrm{A}_2], \mathrm{A}_3]$ και αναδρομικά $[A_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, ...] = [...[[A_1, \mathrm{A}_2], \mathrm{A}_3]...]$.

    Προσοχή ! Εν γένει $[A_1, \mathrm{A}_2] \neq [A_2, \mathrm{A}_1]$ και $[[A_1, \mathrm{A}_2], \mathrm{A}_3] \neq [A_1, [\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3]]$. Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα στην ομάδα S_3.

14. Έστω G ομάδα και $A, B, \Gamma \leq G$. Δείξτε ότι

    (α΄) Εστω G ομάδα και $A, B \leq G$. Τότε ισχύει $[A, B] = [\mathrm{B}, A]$ και $[A, B] \lhd \langle A, B \rangle$.

    (β΄) Αν οι υποομάδες A, B, Γ είναι κανονικές στην G, τότε ισχύει $[AB, \Gamma] = [A, \Gamma][B, \Gamma]$.

    (γ΄) Αν οι δύο από τις υποομάδες $[A, B, \Gamma]$, $[B, \Gamma, A]$, $[\Gamma, AB,]$, περιέχονται σε μια κανονική υποομάδα της G, τότε και η τρίτη υποομάδα περιέχεται στην υποομάδα αυτή.
    Στην περίπτωση όπου και οι τρεις υποομάδες είναι κανονικές, τότε ίσχύει $[A, B, \Gamma] \leq [B, \Gamma, A] \cdot [\Gamma, AB,]$.
    Υπόδειξη. Αποδείξτε πρώτα τις έξης σχέσεις: Έστω $x, y, z \in G$. τότε ισχύει
    $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$ και
    $[x, y^{-1}, z]^y \cdot [y, z^{-1}, x]^z \cdot [z, x^{-1}, y]^x = 1$
    Εδώ, χάριν συντομίας χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό: Για $a, b \in G$ ορίζουμε $a^b = b^{-1}ab$. Δεν είναι καθόλου αυθαίρετος αυτός συμβολισμός. Για παράδειγμα $(a^b)^c = a^{bc}$. Η γνωστή ιδιότητα των 'δυνάμεων', που γνωρίζουμε ...απ' το *Δημοτικό*!

15. Έστω G ομάδα $\mathrm{N} \lhd G$ και $G = G^0 \rhd G^1 \rhd \cdots$,
    $G = \gamma_1(G) \rhd \gamma_2(G) \rhd \cdots$,

$1 = Z_0(G) \lhd Z_1(G) = Z(G) \lhd Z_2 \lhd \cdots$ η παράγωγος, η κατώτερη κεντρική και η ανώτερη κεντρική σειρά αντίστοιχα.
Δείξτε ότι:

(α′) $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$.

(β′) $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$.

(γ′) $[\gamma_i(G), Z_j(G)] \leq Z_{j-i}(G)$, (για $j \geq i$).

(δ′) $Z_i(G/Z_j(G)) = Z_{i+j}(G)/Z_j(G)$.

(ε′) $(G/N)^{(i)} = G^{(i)}N/N$ και $\gamma_i(G/N) = \gamma_i(G)N/N$.
Ερώτημα: Ισχύει κάτι ανάλογο για την ανώτερη κεντρική σειρά;
Δηλαδή $\mathrm{Z}_i(G/N) = ???\mathrm{Z}_i(G)N/N$.

(στ′) $G^{(i)} \leq \gamma_{2^i}(G)$. Συνεπώς, αν η G είναι μηδενοδύναμη με κλάση μηδενοδυναμίας n, τότε η κλάση επιλυσιμότητας της G είναι το πολύ ίση με $(log_2 n) + 1$.

(ζ′) Η ομάδα $\gamma_2(G/\gamma_4(G))$ είναι αβελιανή.

16. Έστω G και $K \leq H \leq G$ με $K \lhd G$. Δείξτε ότι $[H, G] \leq K$ αν και μόνο αν $H/K \leq Z(G/K)$.

17. Έστω G ομάδα με $G/Z(G)$ πεπερασμένη. Δείξτε ότι η παράγωγος υποομάδα G' είναι πεπερασμένη.

    Παρατήρηση: 'Διαισθητικά' μπορούμε να δούμε την αλήθεια αυτού του ισχυρισμού. Όταν το κέντρο είναι 'σχεδόν όλη η ομάδα' (το πηλίκο $G/Z(G)$ είναι πεπερασμενο), η ομάδα είναι 'σχεδόν αβελιανή' , δηλαδή η παράγωγος ομάδα είναι 'σχεδόν τετριμμένη', δηλαδή πεπερασμένη.

    Παρ'όλα ταύτα η απόδειξη δεν είναι προφανής. Αναζητήστε την!!

    Εδώ αξίζει να υπενθυμίσουμε ένα "δυϊκό" αποτέλεσμα.

    Έστω G ομάδα και H κανονική πεπερασμένη υποομάδα της. Δείξτε ότι η κεντροποιούσα της $C_G(H)$ είναι κανονική και πεπερασμένου δείκτη στην G.
    Δηλαδή 'μικρές' υποομάδες έχουν 'μεγάλες' κεντροποιούσες.

18. Έστω $G = H \times K$. Δείξτε ότι $\gamma_i(G) = \gamma_i(H) \times \gamma_i(K)$ και $G^{(i)} = H^{(i)} \times K^{(i)}$.

19. Έστω G ομάδα και H, K κανονικές επιλύσιμες/μηδενοδύναμες ομάδες της. Δείξτε ότι η HK είναι επιλύσιμη/μηδενοδύναμη.

    Σημείωση: Η περίπτωση της επιλυσιμότητας είναι τετριμμένη. Η περίπτωση της μηδενοδυναμίας χρειάζεται προσεκτική αντιμετώπιση.

20. Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα. Δείξτε ότι κάθε μέγιστη υποομάδα της είναι κανονική και το αντίστοιχο πηλίκο είναι πεπερασμένο με τάξη πρώτο αριθμό.

21. Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα και A μια μέγιστη κανονική αβελιανή ομαδα της. Δείξτε ότι $A = C_G(A)$.

22. Έστω G πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα με τάξη $\mid G \mid = n$. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο m με $m \mid n$ υπάρχει υποομάδα της G με τάξη m.

    Σχόλιο: Στις πεπερασμένες μηδενοδύναμες ομάδες ισχύει το ατίστροφο του Θεωρήματος του Lagrange.

23. Έστω G ομάδα με $G = G'$. Δείξτε ότι η ομάδα $G/Z(G)$ έχει τετριμμένο κέντρο.

    Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την Άσκηση 14_γ.

24. Έστω G ομάδα και $H \lhd G$ με $H \cap G' = 1$. Δείξτε ότι $H \leq Z(G)$.

25. Έστω G_n μια πεπερασμένη p-ομάδα με κλάση μηδενοδυναμίας n (γιατί για τον τυχαίο θετικό ακέραιο n υπάρχουν πεπερασμένες p-ομάδες με κλάση μηδενοδυναμίας n;;)

    Έστω G το σύνολο όλων των τελικά σταθερών ακολουθιών $(g_1, g_2, \ldots, 1, \ldots)$, όπου $g_i \in G_i$. Προφανώς (;;) το G είναι μια ομάδα (η πράξη κατά συντεταγμένες), κάθε στοιχείο της G έχει τάξη μια δύναμη του p. Δηλαδή η G είναι μια (άπειρη) p-ομάδα. Η οποία δεν είναι μηδενοδύναμη (γιατί;;;)