0.1 Ελεύθερες ομάδες.

0.1.1 Ορισμός-Καθολική Ιδιότητα.

Ορισμός 0.1.1. *Έστω X ένα (μη κενό) σύνολο αναζητούμε μια ομάδα, έστω F, και μια απεικόνιση $\sigma : X \longrightarrow F$ με την εξής ιδιότητα:*

Για **κάθε** *ομάδα G και* **κάθε** *απεικόνιση $\alpha : X \longrightarrow G$ να υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\beta : F \longrightarrow G$ ώστε $\beta \circ \sigma = \alpha$.*

Την ομάδα F και την απεικόνιση σ, αν υπάρχουν, θα την ονομάζουμε **ελεύθερη** *επί του X, μέσω της απεικόνισης σ.*

Πριν αποδείξουμε ότι πράγματι υπάρχει τέτοια ομάδα, θα δούμε μερικές *συνέπειες* του ορισμού.

Η απεικόνιση σ είναι 1-1. Πράγματι, αν το X είναι μονοσύνολο, η $sigma$ είναι 1-1. Έστω x_1, x_2 δύο διαφορετικά στοιχεία του X. Επιλέγουμε μια ομάδα G με τουλάχιστον δύο διαφορετικά τοιχεία g_1, g_2 και μια απεικόνιση $\alpha : X \longrightarrow G$ με $\alpha(x_1) = g_1$ και $\alpha(x_2) = g_2$, τότε, επειδή υπάρχει ο ομομορφισμός $\beta : F \longrightarrow G$ με $\beta \circ \sigma = \alpha$, έχουμε $(\beta\circ\sigma)(x_1) = \alpha(x_1) = g_1$ και $(\beta\circ\sigma)(x_2) = \alpha(x_2) = g_2$. Τα g_1, g_2 έχουν υποτεθεί διαφορετικά, η β είναι απεικόνιση, άρα, αναγκαστικά, $\sigma)(x_1) \neq \sigma)(x_2)$.

Επομένως θα μπορούσαμε να *ταυτήσουμε* το σύνολο X με την εικόνα του $\sigma(X) \subset F$.

Όπως *διαισθανόμαστε* το σύνολο X (και η 1-1 απεικόνιση σ) καθορίζουν την ελεύθερη ομάδα F.

Πρόταση 0.1.2. *Έστω F_1, F_2 δύο ελεύθερες ομάδες επί των ισοπληθικών συνόλων X_1 και X_2 αντίστοιχα ($\mid X_1 \mid = \mid X_2 \mid$). Οι F_1 και F_2 είναι ισόμορφες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια 1-1 και επί απεικόνιση $\alpha : X_1 \longrightarrow X_2$.

Από τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας F_1 και τον *ρόλο* της τυχαίας ομάδας να τον έχει η ομάδα F_2 έχουμε $\beta_1\sigma_1 = \sigma_2\alpha$.

Τώρα, αντιστρέφοντας τους ρόλους, έχουμε $\beta_2\sigma_2 = \sigma_1\alpha^{-1}$.

Οπότε, συνθέτοντας από αριστρά, στην πρώτη ισότητα, με τον ομομορφισμό β_2 και χρησιμοποιώντας την δεύτερη σχέση έχουμε

$\beta_2\beta_1\sigma_1 = \beta_2\sigma_2\alpha = \sigma_1\alpha^{-1}\alpha = \sigma_1$.

Αλλά έχουμε και την προφανή σχέση $1_{F_1}\sigma_1 = \sigma_1$. Αλλά οι ομομορφισμοί β_1, β_2, από τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας, είναι μοναδικοί. Δηλαδή, $\beta_2\beta_1 = 1_{F_1}$.

Δυϊκά $\beta_1\beta_2 = 1_{F_2}$ και τέλος.

□

Παρατήρηση 0.1.3. *Για να είναι το όλο "οικοδόμημα" στέρεο πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.*

Έστω F_1, F_2 δύο ελεύθερες ομάδες επί των συνόλων X_1 και X_2 αντίστοιχα . Αν οι F_1 και F_2 είναι ισόμορφες, τότε τα σύνολα X_1 και X_2 είναι ισοπλήθικά ($\mid X_1 \mid = \mid X_2 \mid$).

Θα αναβάλουμε προς το παρόν την απόδειξη, διότι μας λείπει "κάτι".

Πρόταση 0.1.4. *Έστω G μια ομάδα παραγόμενη από ένα (υπο)σύνολό της Y και F μια ελεύθερη ομάδα επί του συνόλου X. Αν $\alpha : X \longrightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση επί, τότε ο (μοναδικός) ομομορφισμός $\beta : F \longrightarrow G$, ο οποίος επεκτείνει την απεικόνιση α είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη. Προφανής αφού η α είναι επί του συνόλου Y, το οποίο παράγει την G.

□

Η προηγούμενη πρόταση είναι πολύ σημαντική στην όλη *θεώρηση* της Θεωρίας Ομάδων και συνοψίζεται στο εξής:

Κάθε ομάδα είναι πηλίκο μιας ελεύθερης ομάδας.

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε μια ομάδα G, τότε αυτή (μπορεί να) έχει πολλά σύνολα σύνολα γεννητόρων και για κάθενα από αυτά, έστω ένα Y, υπάρχουν άπειρα σύνολα X και απεικονίσεις $\alpha : X \longrightarrow Y$, οι οποίες να είναι επί. Άρα υπάρχουν άπειρες το πλήθος ελεύθερες ομάδες, των οποιών η G είναι πηλίκο. Παρ' όλα ταύτα το προηγουμένο αποτέλεσμα **δεν** χάνει την σημασία του.

Πρόταση 0.1.5. *Έστω F μια ελεύθερη ομάδα και $\alpha : F \longrightarrow H$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Τότε για επιμορφισμό ομάδων $\beta : G \longrightarrow H$ υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\gamma : F \longrightarrow G$, ώστε $\beta\gamma = \alpha$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η F είναι ελεύθερη επί του συνόλου X, τότε για κάθε $x \in X \subset F$ έχουμε $\alpha(x) \in H = Im\,\beta$ (δεν ξεχνάμε η β έχει υποτεθεί επί). Επομένως υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $g_x \in G$ με $\beta(g_x) = \alpha(x)$. Η F είναι ελεύθερη, άρα η απεικονιση $x \longrightarrow g_x$ επεκτείνεται σε ένα ομομορφισμό $\gamma : F \longrightarrow G$, ο οποίος πληροί την σχέση $\beta\gamma = \alpha$ (γιατί;;), δεν ξεχνάμε ότι το X παράγει την F.

□

Κατασκευή των ελευθέρων Ομάδων.

Έστω ένα συνολο X και $X^{-1}\{x^{-1} \mid x \in X\}$, τα τυπικά αντιστροφα των στοιχείων του X. .....κατασκευάζουμε τις λέξεις.... η κενή λέξη ℓ.....ορίζουμε την παράθεση λέξεων... το σύνολο S όλων των λέξεων γίνεται ημιομάδα με πράξη την παράθεση λέξεων. .....

Ορίσαμε στο σύνολο S δύο "αντιστρεπτές" διαδικασίες, σε μια λέξη $w = x_1^{e_1} \cdots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots x_n^{e_n}$ παρεμβάλουμε τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$ (όλα τα $e's$ είναι $\pm$), η διαγράφουμε τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$.....

Οι διαδικασίες αυτές οριζουν μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο S ....Το σύνολο πηλίκων $S/\sim$ αποκτά την δομή ομάδας ορίζοντας ως πράξη $[w]\cdot[u] =: [wu]$.... Το ενδιαφέρον εδώ είναι να δείξουμε ότι η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη (δεν εξαρτάται από την επιλογή των αντιπροσώπων).....

Την ομάδα $(S/\sim, \cdot)$ την συμβολλίζουμε με F και είναι η ζητούμενη ελεύθερη ομάδα επί του X με την απεικόνιση $\sigma : X \longrightarrow F$ να είναι η προφανής $x \longrightarrow [x]$.

Πρώτη παρατήρηση είναι τώρα ότι η εικόνα $\sigma(X)$ προφανώς παράγει την F.

Έστω τώρα μια απεικόνιση $\alpha : X \longrightarrow G$ σε μια ομάδα G με $\alpha(x_i) = g_i$. Πρέπει να ορίσουμε έναν ομομορφισμό $\beta : F \longrightarrow G$, οποίος να επεκτείνει την α $(\beta\sigma = \alpha)$.

Μια δεύτερη παρατήρηση είναι ότι κάθε απεικόνιση $\bar{\beta} : S \longrightarrow G$, η οποία απεικονίζει κάθε λέξη $w = x_1^{e_1} \cdots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots x_n^{e_n}$ στο στοιχείο $\bar{\beta}(w) = g_1^{e_1} \cdots g_i^{e_i} g_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots g_n^{e_n}$ ορίζει έναν ομομορφισμό ομάδων $\beta : F \longrightarrow G$ (γιατί;;;). Μα αφού τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$ απεικονίζονται σε ένα $g^e g^{-e} = 1_G$, έχουμε ότι αν $w \sim u$ (δηλαδή $[w] = [u]$), τότε $\beta([w]) = \beta([u])$, όπου ως $\beta([w]) = g_1^{e_1} \cdots g_i^{e_i} g_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots g_n^{e_n}$. Τώρα προφανώς $\beta\sigma = \alpha$ και τέλος;;;;

Όχι δεν τελειώσαμε πρέπει να δείξουμε ότι ο β είναι μοναδικός με αυτή την ιδιότητα.

Πράγματι αν $\gamma : F \longrightarrow G$ είναι ένα άλλος ομομορφισμός με $\gamma\sigma = \alpha$, τότε οι β και γ "συμφωνούν" στα στοιχεία του συνόλου $\sigma(X)$, μα αυτό το σύνολο παράγει την F, άρα τελικά $\beta = \gamma$.

Ανηγμένες λέξεις.

Μια λέξη $w = x_1^{e_1} \cdots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots x_n^{e_n}$ στο σύνολο S θα ονομάζεται **ανηγμένη** αν δεν περιέχει τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$.

Προφανώς, αν έχουμε μια λέξη $w = x_1^{e_1} \cdots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots x_n^{e_n}$, κάνοντας διαδοχικές διαγραφές τμημάτων της μορφής $x^e x^{-e}$ σε πεπερασμένα βήματα φθάνουμε σε μια ανηγμένη λέξη ισοδύναμη με την αρχική. Το πρόβλημα είναι το εξής: Αν έχουμε δύο ισοδύναμες λέξεις κάνοντας διαδοχικές διαγραφές, σε καθε μία λέξη ξεχωριστά, οι ισοδύναμες ανηγμένες λέξεις, στις οποίες φθάνουμε είναι ίσες;

Έστω ότι έχουμε αρχικά τις ισοδύναμες λέξεις w και u με αντίστοιχες ανηγμένες τις $\bar{w}$ και $\bar{u}$. Προφανώς $[w] = [\bar{w}] = [u] = [\bar{u}]$, οπότε $[w][u]^{-1} = [wu^{-1}] = 1_F = [\ell]$. Αυτό δίνει $[\bar{w}\bar{u}^{-1}] = 1_F = [\ell]$. Επομένως, αν $\bar{w} = a_1^{e_1} \cdots a_i^{e_i} a_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots a_n^{e_n}$ και $\bar{u} = b_1^{k_1} \cdots b_i^{k_i} b_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots b_m^{k_m}$, τότε από την σχέση $[\bar{w}\bar{u}^{-1}] = 1_F = [\ell]$ έπεται ότι αναγωγές έχουμε **μόνο** στο τμήμα $\cdots a_n^{e_n} b_m^{-k_m} \cdots$, δηλαδή $a_n^{e_n} = b_m^{k_m}$, Οπότε προχωράμε και τελικά (αναγκαστικά) $n = m$ και $a_i^{e_i} = b_i^{k_i}$.

Μετά από αυτό μπορούμε να ταυτήσουμε κάθε στοιχείο $[w]$ της ελύθερης ομάδας F με την αντίστοιχη ανηγμένη λέξη $\bar{w}$. Ως (ανηγμένο) μήκος πλέον της ανηγμένης λέξης $\bar{w} = a_1^{e_1} \cdots a_i^{e_i} a_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots a_n^{e_n}$ ορίζουμε το n και είναι μια καλά ορισμένη έννοια.

Παραδείγματα Ελευθέρων ομάδων.

Στο μιγαδικό επίπεδο ορίζουμε τις απεικονίσεις $\alpha(z) = z+2$ και $\beta(z) = \frac{z}{2z+1}$, $z \neq -1/2$ και $\beta(-1/2) = 1/2$. Οι α και β παράγουν μια ελεύθερη ομάδα με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων.

....

Ας δούμε το θέμα ''διαισθητικά'', χωρίς καμία έκπτωση στην αυστηρότητα. Εδώ το κρίσιμο σημείο είναι ότι, αν παρατηρήσουμε, θα δούμε ότι οι δυνάμεις της α απεικονίζουν εσωτερικά σημεία του μονδιαίου κύκλου εκτός αυτού, ενώ δύναμεις της β απεικονίζουν εξωτερικά σημεία του μοναδιαίου κύκλου στο εσωτερικού του (εκτός του μηδενός). Επομένως **καμία** ανηγμένη λέξη της μορφής $\alpha^{k_1}\beta^{\lambda_1} \cdots \alpha_{k_n}\beta^{\lambda_n}$ δεν μας δίνει την ταυτοτική μετάθεση.

Μπορείτε και πρέπει να κάνετε τον έλεγχο ξεκινώντας με το ότι οι α και β αντιστρέφονται.