0.1 Μια ιδέα της Γεωμετρικής Θεωρίας Ομάδων.

Το μεγάλο άλμα στη μελέτη των ομάδων έγινε όταν οι ομάδες θεωρήθηκαν ως "γεωμετρικά αντικείμενα" και άρχισαν να μελετώνται γεωμετρικές και τοπολογικές ιδιότητες αυτών των αντικειμένων με σκοπό την μελέτη αλγεβρικών ιδιοτήτων των ομάδων.

Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο αλγεβρικές ιδιότητες των ομάδων προσδιορίζουν τα αντίστοιχα γεωμετρικά αντικείμενα.

Στα επόμενα θα πάρουμε μια απειροελάχιστη "γεύση" από αυτή την περιοχή μελέτης των ομάδων.

0.1.1 Προγεγγιστικές ιδιότητες Ομάδων.

Έστω ότι έχουμε μια κλάση, έστω $\mathcal{P}$, ομάδων π.χ. η $\mathcal{P}$ να είναι η κλάση των πεπερασμένων ομάδων, των πεπερασμένων p-ομάδων, των μηδενοδυνάμων ομάδων κ.λ.π. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομάδα G, η οποία δεν ανήκει σε μια κλάση, αλλά θέλουμε να την μελετήσουμε με την "βοήθεια" ιδιοτήτων που έχουν ομάδες, οι οποίες ανήκουν σε κλάσεις, τις οποίες "γνωρίζουμε καλά".

Ορισμός 0.1.1. *Έστω $\mathcal{P}$ μια κλάση ομάδων και G μια τυχαία ομάδα. Θέτουμε $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(G) = \{G/N \mid G/N \in \mathcal{P}\}$. Δηλαδή το $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(G)$ δεν είναι τίποτε άλλο από το σύνολο όλων των πηλίκων της G, τα οποία έχουν την ιδιότητα $\mathcal{P}$.*

Η ομάδα G θα ονομάζεται **προσεγγιστικά $\mathcal{P}$ ομάδα** *($r\mathcal{P}$ ομάδα, αν για κάθε $1 \neq g \in G$ υπάρχει $G/N \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(G)$ με $g \notin N$. Δηλαδή η εικόνα του g μέσω του επιμορφισμού $G \longrightarrow G/N$ δεν είναι τετριμμένη.*

Οπότε, από την κλάση $\mathcal{P}$, δημιουργείται μια άλλη κλάση ομάδων η $r\mathcal{P}$.

Προφανώς κάθε $\mathcal{P} \subseteq r\mathcal{P}$ με τον εγκλεισμό (σχεδόν) πάντα γνήσιο. Επομένως, το πρόβλημα που τίθεται είναι μια ομάδα G, η οποία δεν ανήκει στην $\mathcal{P}$, μήπως ανήκει στην $r\mathcal{P}$; Οπότε να προσπαθήσουμε να την μελετήσουμε "καταφεύγοντας" σε ιδιότητες που έχουν οι ομάδες που ανήκουν στην κλάση $\mathcal{P}$;

Πρόταση 0.1.2. *Έστω $\mathcal{P}$ μια κλάση ομάδων και G μια ομάδα. Η ομάδα G είναι $r\mathcal{P}$ αν και μόνο αν η $\bigcap\{\, N \mid N \lhd G \text{ με } G/N \in \mathcal{P} \,\} = 1$.*

Απόδειξη. Προφανής.

□

Παραδείγματα 0.1.3. *1. Κάθε πεπερασμένα γεννώμενη αβελιανή ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη (rf).*

Υπάρχουν πάρα πολλοί τρόποι για να το αποδείξουμε.

Θα ακολουθήσουμε έναν τρόπο, ο οποίος μας θα μας φανεί χρήσιμος στα επόμενα.

Πρώτον, κάθε άπειρη κυκλική ομάδα είναι rf (γιατί;;).

Δεύτερον, κάθε πεπερασμένα γεννώμενη αβελιανή ομάδα είναι της μορφής $G = (\oplus_{i=1}^{n}\langle a_i \rangle) \oplus T$, όπου οι $\langle a_i \rangle$ είναι άπειρες κυκλικές και T πεπερασμένη. Έστω ένα μη τεριμμένο $g = a_1^{k_1}, a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n} \cdot s$ με το $s \in T$. Αν όλα τα $k_i = 0$, τότε $g = s \in T$ και έχουμε τελειώσει (γιατί;;). Μα αφού το T είναι πεπερασμένο πηλίκο της G. Αν κάποιο $k_i \neq 0$ τότε έχουμε τον επιμορφισμό $\varphi_i : G \longrightarrow \langle a_i \rangle$ με $\varphi_i(g) = a_i^{k_i} \neq 1$. Η $\langle a_i \rangle$ είναι άπειρη κυκλική, άρα rf, οπότε, υπάρχει $\vartheta : \langle a_i \rangle \longrightarrow \Phi$ με Φ πεπερασμένη και $\vartheta(a_i^{k_i}) \neq 1$. Οπότε η σύνθεση των δύο ομομορφισμών μας δίνει την απάντηση.

2. Η ελεύθερη ομάδα F είναι προσεγγιστικά επιλύσιμη.

Έστω $F = F^{(0} \rhd F^{(1)} = F' \rhd F^{(2)} \rhd \cdots$ η παράγωγος σειρά. Τότε πληρούνται οι όροι του επομένου Λήμματος και τέλος, από την προηγουμένη πρόταση.

Λήμμα 0.1.4. *Έστω F ελεύθερη ομάδα και $F = F_0 \geq F_1 \geq F_2 \geq \cdots$ μια ακολουθία υποομάδων, όπου κάθε μια είναι γνήσια και χαρακτηριστική υποομάδα της προηγουμένης. Τότε η $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = 1$.*

Απόδειξη. Η ιδέα της απόδειξης είναι απλή. Κάθε σύνολο γεννητόρων μιας ομάδας μέσω ενός αυτομορφισμού απεικονίζεται σε ένα συνολο γεννητόρων. Επειδή η F είναι ελεύθερη κάθε 1-1 και επί απεικόνιση μεταξύ δύο συνόλων γεννητόρων της επεκτείνεται σε αυτομορφισμό. Άρα αν έχουμε έναν γεννήτορα ενός όρου F_i να ανήκει στον F_{i+1}, τότε ο F_{i+1} θα περιείχε όλους τους γεννήτορες της F_i άτοπο. Επομένως δεν υπάρχει μη τετριμμένο στοιχείο που να ανήκει στην τομή $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = 1$.

□

Όπως είδαμε μια ελεύθερη ομάδα είναι προσεγγιστικά επιλύσιμη, πιο κάτω θα δούμε ότι είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη και προσεγγιστικά μηδενοδύναμη. Οι διότητες αυτές δεν ''κληρονομούνται'' στα πηλίκα. Δηλαδή γενικά το πηλίκο μιας $r\mathcal{P}$ ομάδας δεν είναι κατ' ανάγκη $r\mathcal{P}$. Πράγματι, αν ίσχυε αυτό, τότε θα μέναμε ''άνευ αντικειμένου μελέτης'', δεδομένου ότι κάθε ομάδα είναι πηλίκο μιας ελεύθερης ομάδας.

Αν η κλάση $\mathcal{P}$ είναι κλειστή ως προς τις υποομάδες, δηλαδή κάθε υποομάδα μιας ομάδας που ανήκει στην $\mathcal{P}$ ανήκει και αυτή στην $\mathcal{P}$, τότε μπορούμε να αποδείξουμε την εξής:

Πρόταση 0.1.5. *Έστω μια κλάση ομάδων $\mathcal{P}$, η οποία είναι κλειστή ως προς τις υποομάδες. Τότε κάθε υποομάδα μια $r\mathcal{P}$ ομάδας είναι και αυτή $r\mathcal{P}$.*

Απόδειξη. Έστω G μια $r\mathcal{P}$ ομάδα, από την Πρόταση 0.1.2 έχουμε ότι $\bigcap\{ N \mid N \lhd G$ με $G/N \in \mathcal{P} \} = 1$. Αν H είναι μια υποομάδα της G, τότε για κάθε N κανονική υποομάδα της G με την ιδιότητα $G/N \in \mathcal{P}$ έχουμε $H/H \cap N \approx HN/N \leq G/N \in \mathcal{P}$ και τέλος (γιατί;;).

□

Επειδή τώρα οι υποομάδες πεπερασμένων, επιλυσίμων, μηδενοδυνάμων κ.λ.π. είναι πεπερασμένες, επιλύσιμες, μηδενοδύναμες.... Έχουμε το σχετικό Πόρισμα......

Πρόταση 0.1.6. *Έστω δύο κλάσεις ομάδων $\mathcal{P}$ και $\mathcal{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε ομάδα $G \in \mathcal{P}$ έχει την ιδιότητα να είναι $r\mathcal{R}$, τότε κάθε ομάδα, η οποία είναι $r\mathcal{P}$ είναι και $r\mathcal{R}$.*

Φορμαλιστικά: $(G \in \mathcal{P} \Rightarrow G \in r\mathcal{R}) \Rightarrow (G \in r\mathcal{P} \Rightarrow G \in r\mathcal{R})$.

Απόδειξη. Έστω G ομάδα η οποία είναι $r\mathcal{P}$ και ένα $1 \neq g \in G$, τότε, από τον ορισμό, υπάρχει $N \lhd G$ με $g \notin N$ και $G/N \in \mathcal{P}$. Τώρα από την υπόθεση έχουμε ότι $G/N \in r\mathcal{R}$, αυτό σημαίνει, από τον ορισμό, ότι υπάρχει $M/N \lhd G/N$ με $gN \notin M/N$ και $(G/N)/(M/N) \in \mathcal{R}$, δηλαδή $G/M \in \mathcal{R}$ και $g \notin M$. Συνεπώς $G \in r\mathcal{R}$.

□

Παράδειγμα: Είδαμε ότι οι πεπερασμένα γεννώμενες αβελιανές ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες. Άρα πεπερασμένα γεννώμενες προσεγγιστικά αβελιανές ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες.

Πόρισμα 0.1.7. *Έστω $\mathcal{P}$ μια κλάση ομάδων. Τότε ισχύει $r\mathcal{P} = r(r\mathcal{P})$.*

Προσεγγιστικά πεπερασμένες ομάδες.

Εδώ θα επικεντρωθούμε στις προσεγγιστικά πεπερασμένες ομάδες.

Πρώτα απ' όλα ένας ισοδύναμος ορισμός

Πρόταση 0.1.8. */Άσκηση:*

Έστω G ομάδα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων.

i) $\bigcap\{ H \mid H \leq_f G\} = 1$.

ii) *Για κάθε $g \in G$ υπάρχει M_g πεπερασμένη ομάδα και $\varphi : G \longrightarrow M_g$ ομομορφισμός έτσι ώστε $\varphi(g) \neq 1$.*

iii) *Για κάθε $g \in G$ υπάρχει $H_g leq_f G$ έτσι ώστε $g \notin H_g$.*

Πριν προχωρήσουμε ένα κλασσικό παράδειγμα μη προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας.

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό ερώτημα. Στην προσθετική ομάδα των ρητών $\mathbb{Q}$ για κάθε γνήσια μη τετριμμένη υποομάδα H, στο πηλίκο $\mathbb{Q}/H$ κάθε στοιχείο είναι πεπερασμένης τάξης, αλλά η ομάδα $\mathbb{Q}/H$ είναι άπειρη.

Ένα άλλο απλό ερώτημα. Στην προσθετική ομάδα των ρητών $\mathbb{Q}$ υπάρχουν $H, K \leq \mathbb{Q}$ μη τεριμμένες, ώστε $H \cap K = 0$. Προφανώς όχι (γιατί;;).

Ας δούμε και ένα άλλο (δυϊκό) ερώτημα. Στην προσθετική ομάδα των ρητών $\mathbb{Q}$ υπάρχει $\mathrm{H} \leq \mathbb{Q}$ γνήσια ώστε να είναι πεπερασμένου δείκτη; Προφανώς όχι (γιατί;;;).

Συμπέρασμα: Η προσθετική ομάδα των ρητών $\mathbb{Q}$ δεν είναι rf.

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις ότι οι ελεύθερες ομάδες είναι rf. Θα δώσουμε μια έμμεση απόδειξη.

Πρόταση 0.1.9. *Έστω G μια πεπερασμένα γεννώμενη ομάδα, η οποία είναι rf. Τότε η ομάδα αυτομορφισμών της είναι rf.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι μια σειρά και στηρίζεται σε δύο γνωστά λήμματα.

Έστω φ ένας μη τετριμμένος αυτομορφισμός της G, τότε υπάρχει ένα $g \in G$ με $\varphi(g) \neq g$, δηλαδή το $r = g^{-1}\varphi(g) \neq 1$.

Η ομάδα G έχει υποτεθεί rf, συνεπώς υπάρχει $N \lhd G$ πεπερασμένου δείκτη, με $r \notin N$.

Η ομάδα G έχει υποτεθεί πεπερασμένα γεννώμενη, επομένως υπάρχει (από το Λήμμα 1) M χαρακτηριστική υποοομάδα πεπερασμένου δείκτη στην G με $r \notin M$.

Επειδή η M είναι χαρακτηριστική ο αυτομορφισμός φ επάγει έναν αυτομορφισμό $\bar{\varphi}$ στο πεπερασμένο πηλίκο G/M μάλιστα δέ $\bar{\varphi}(rM) \neq rM$ (από το Λήμμα 2). Επειδή η G/M είναι πεπερασμένη η $Aut(G/M)$ είναι πεπερασμένη και τέλος.

□

Λήμμα 0.1.10. *Λήμμα 1. Έστω G μια πεπερασμενα γεννώμενη ομάδα, τοτε για κάθε n θετικό ακέραιο υπάρχουν πεπερασμένο το πλήθος υποομάδες της G με δείκτη τον δεδομένο n.*

Κατά συνέπεια, αν G περιέχει υποομάδες πεπερασμένου δείκτη, τότε περιέχει χαρακτηριστικές υποομάδες πεπερασμενου δείκτη.

Λήμμα 0.1.11. *Λήμμα 2. Έστω G μια ομάδα και M μια χαρακτηριστική υποομάδα της, τότε για κάθε ορίζεται ένας ομομορφισμός ομάδων $Aut(G) \longrightarrow Aut(G/M)$ με $\varphi \longrightarrow \bar{\varphi}$, όπου ο $\bar{\varphi}$ ορίζεται ως εξής: $\bar{\varphi}(gM) = \varphi(g)M$.*

Το πρώτο Λήμμα το είχαμε αποδείξει στην αρχή των μαθημάτων. Το δεύτερο, αν δεν το έχετε ξανασυναντήσει, να το αποδείξετε.

Θεώρημα 0.1.12. *Οι ελεύθερες ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες.*

Απόδειξη. Έστω F μια ελεύθερη ομάδα. Υποθέτουμε στην αρχή ότι είναι πεπερασμένα γεννώμενη.

Πέρνουμε το πηλίκο $G = F/\gamma_2(F)$, το οποίο είναι μια πεπερασμένα γεννώμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα. Επομένως από το πρώτο παράδειγμα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Συνεπώς (από την προηγουμένη πρόταση), η ομάδα αυτομορφισμών της $Aut(G) \approx GL(n, \mathbb{Z})$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Όταν πρωτομιλήσαμε για ελεύθερες ομάδες είχαμε δεί ένα παράδειγμα ελεύθερης ομάδας με στοιχεία πίνακες. Εκεί η ελεύθερη ομάδα ήταν διάστασης 2, όμως, από τον τρόπο κατασκευής, μπορούμε να δούμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ελεύθερες ομάδες οποιασδήποτε πεπερασμένης διάστασης n, οι οποίες να είναι υποομάδες της $Aut(G) \approx GL(n, \mathbb{Z})$, η οποία, μόλις αποδειξαμε ότι, είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Τέλος.

Έστω τώρα η F είναι απείρως παραγώμενη από ένα σύνολο X. Αν $1 \neq w \in F$, τότε αυτό γράφεται ως μια ανηγμένη λέξη στοιχείων του X. Στην ανηγμένη αυτή γραφή εμφανίζονται πεπερασμένο το πλήθος χαρακτήρες. Έστω S το πεπερασμένο υποσύνολο του X, το οποίο περιέχει τους χαρακτήρες που εμφανίζονται στη λέξη w. Τότε πέρνουμε την κανονική υποομάδα υποομάδα την παραγόμενη από το $X \quad S$, $\mathrm{N} = \langle X \quad S \rangle$.

Το πηλίκο F/N είναι προφανώς(;;) η πεπερασμένα γεννώμενη ελεύθερη ομάδα η παραγώμενη από το S. Στο πηλίκο αυτό η εικόνα wN της w δεν είναι τεριμμένη ....και συνεχίζουμε.

□

Το κρίσιμο στοιχείο στην όλη υπόθεση είναι ότι στο Λήμμα 1 η υπόθεση η ομάδα μας να είναι πεπερασμένα γεννώμμενη ήταν κρίσιμη.

Ως "αντίκτυπο" αυτής της αναγκαίας συνθήκης θα δούμε το εξής:

Αν και μια ελεύθερη ομάδας απείρου διαστάσεως είναι rf η αντίστοιχη ομάδα αυτομορφισμών της δεν είναι rf.

Πράγματι, έστω F ελεύθερη ομάδα επί ενός απείρου αριθμησίμου συνόλου $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Κάθε μετάθεση των στοιχείων του X ορίζει αυτομορφισμό της F (δεν ξεχνάμε την καθολική ιδιότητα της F). Συνεπώς $S_X \leq AuT(F)$. Η S_X περιέχει άπειρες απλές ομάδες, οι οποίες δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες, άρα η $Aut(F)$ δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Παρατήρηση 0.1.13. *Στο προηγούμενο θεώρημα για να δούμε ότι η $GL(n, \mathbb{Z})$ rf επικαλεστήκαμε ότι είναι η ομάδα αυτομορφισμών της ελεύθερης αβελιανής ομάδας διάστασης n.*

Θα μπορούσαμε να επιχειρηματολογίσουμε απ' ευθείας ως εξής:

Έστω $I_n \neq A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{Z})$. Λαμβάνουμε έναν πρώτο αριθμό $p > \mid a_{ij} \mid$. Ο γνωστός επιμορφισμός $a \longrightarrow a(mod\, p)$ επεκτείνεται(;;) σε επιμορφισμό $GL(n, \mathbb{Z}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{Z}_p)$. Η εικόνα του A μέσω αυτού του επιμορφιμού δεν είναι ο ταυτοτικός πίνακας (λόγω επιλογής του πρώτου p) και τέλος.

Όπως έχουμε ήδη δεί (Πρόταση 0.1.5) οι υποομάδες προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων είναι και αυτές προσεγγιστικά πεπερασμένες. Προφανώς, πηλίκα προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων δεν είναι εν γένει προσεγγιστικά πεπερασμένα.

Παρ' όλα ταύτα, ορισμένες φορές, πηλίκα ομάδων, τα οποία είναι προσεγγιστικά πεπερασμένα μας εξασφαλίζουν ότι και η ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Πρόταση 0.1.14. *Υποθέτουμε ότι η ομάδα G περιέχει μια κανονική υποομάδα H πεπρασμένου δείκτη, η οποία είναι rf. Τοτε η ομάδα G είναι rf.*

Απόδειξη. Έστω $1 \neq g \in G$. Αν το $g \notin H$, τότε έχουμε τελειώσει, διότι $1 \neq gH \in G/H$, η οποία είναι πεπερασμένη. Υποθέτουμε ότι $g \in H$. Τότε υπάρχει M κανονική υποομάδα της H με $g \notin M$ και το πηλίκο H/M να είναι πεπερασμένο. Η M είναι πεπερασμένου δείκτου στην G και τέλος.

□

Παρατήρηση 0.1.15. *Ένα ερώτημα, που εγείρεται, είναι κατά πόσο μπορούμε να γενικεύσουμε την προηγουμένη πρόταση. Προσπαθήστε να αποδείξετε την εξής γενίκευση.*

Υποθέτουμε ότι η ομάδα G είναι το ημιευθύ γινόμενο $G = A \rtimes B$ (Η A είναι η κανονική). Υποθέτουμε ότι και οι δύο υποομάδες A είναι B είναι rf, με την A πεπερασμένα γεννώμενη. Δείξτε ότι η G είναι rf.

Πρόταση 0.1.16. *Κάθε πολυκυκλική ομάδα G είναι rf.*

Απόδειξη. Προφανώς, αν η G είναι πεπερασμένη είναι rf, Υποθέτουμε ότι η G ειναι άπειρη.

Σύμφωνα με την Πρόταση 0.1.44, στο προηγούμενο αρχείο, υπάρχει κανονική υποομάδα H πεπερασμένου δείκτη στην G, η οποία είναι p.i.c., δηλαδή όλα τα πηλίκα της σε μια πολυκυκλική σειρά της είναι άπειρες κυκλικές ομάδες. Αν αποδείξουμε ότι αυτές οι ομάδες είναι rf, τότε το αποτέλεσμα έπεται από την προηγουμένη πρόταση.

Επομένως μπορούμε εξ αρχής να υποθέσουμε ότι έχουμε μια πολυκυκλική ομάδα G με όλα τα πηλίκα της σε μια πολυκυκλική σειρά άπειρες κυκλικές ομάδες.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο Hirsch number αυτής της ομάδας. Αν το Hirsch number είναι ίσον με ένα, τότε αυτή είναι άπειρη κυκλική και προφανώς είναι rf. Υποθέτουμε ότι οι ομάδες με Hirsch number μικρότερον ή ίσον με k είναι rf.

Έστω $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_{n-1} \rhd G_n = 1$ μια πολυκυκλική σειρά της G και $1 \neq g \in G$, αν $g \notin G_1$, τότε για το άπειρο κυκλικό πηλίκο G/G_1 υπάρχει χαρακτηριστική υποομάδα M/G_1 πεπερασμέου δείκτη στην G/G_1 με $gG_1 \notin M/G_1$ και τέλος, αφού $g \notin M$ και η M είναι πεπερασμένου δείκτη στην G.

Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g \in G_1$, η οποία έχει μικρότερο Hirsch number από την G και από την υπόθεση της επαγωγής είναι rf, δηλαδή υπάρχει N κανονική υποομάδα της G_1 πεπερασμένου δείκτη με $g \notin N$, επειδή δε η G_1 είναι πεπερασμένα γεννώμενη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η N είναι χαρακτηριστική υποομάδα της G_1, άρα κανονική υποομάδα της G. Τότε το $gN \in G/N$, η οποία πάλι από την υπόθεση της επαγωγής είναι rf και συνεπώς, όπως προηγουμένως, υπάρχει M/N κανονική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην G/N με $gN \notin M/N$, δηλαδή $g \notin M$ με την M πεπερασμένου δείκτη στην G και τέλος. □

Πόρισμα 0.1.17. *Οι πεπερασμένα γεννώμενες μηδενοδύναμες ομάδες είναι rf.*

Παρατηρήσεις 0.1.18. 1) *Η προηγούμενη πρόταση θα μπορούσε να αποδειχθεί πολύ πιο σύντομα.*

Έχουμε την πολυκυκλική σειρά $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_{n-1} \rhd G_n = 1$ με το πηλίκο G/G_1 κυκλική. Αν η κυκλική ομάδα G/G_1 είναι πεπερασμένη, έχουμε τελειώσει από την Πρόταση 0.1.14. Αν η κυκλική ομάδα G/G_1 είναι άπειρη, σύμφωνα με την άσκηση 10 της ομάδος Δ, η G διασπάται επί της G_1 δια μιας άπειρης κυκλικής. Η G_1 με την υπόθεση της επαγωγής είναι rf, οπότε η G είναι rf, σύμφωνα με την πρόταση που αναφέραμε στην προηγούμενη παρατήρηση (αλλά περιμένει απόδειξη!)

2) *Τώρα μπορείτε να αποδείξετε την Πρόταση 0.1.45 στο προηγούμενο αρχείο, την απόδειξη της οποίας είχαμε αναβάλει.*

3) *Θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει ότι ισχύει παρόμοιο αποτέλεσμα με το προηγούμενο πόρισμα για πεπερασμένα γεννώμενες επιλύσιμες ομάδες.*

Έστω $G = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^2 \rangle$. Η κανονική θήκη της $\langle b \rangle$ είναι αβελιανή (γιατί;;) άρα η G είναι επιλύσιμη. Αλλά $\langle b \rangle^G = \langle a^{-k}ba^k$ με $k \in \mathbb{Z} \rangle$ είναι απείρως παραγώμενη (γιατί;;), συνεπώς η G δεν είναι πολυκυκλική, διοτι αν και η ίδια είναι πεπερασμένη παραγώμενη, περιέχει υποομάδα, η οποία είναι απείρως παραγόμενη.

Hopfian ομάδες

Όταν έχουμε ένα άπειρο σύνολο X ενδέχεται να έχουμε μια απεικόνιση $\vartheta : X \longrightarrow X$, η οποία να είναι επί αλλά όχι 1-1, όπως επίσης να είναι 1-1 αλλά όχι επί. Στην περίπτωση, όπου έχουμε μια άπειρη ομάδα G, το ερώτημα που εγείρεται είναι το εξής: Υπάρχει $\vartheta : G \longrightarrow G$ ομομορφισμός, ο οποίος να είναι επιμορφισμός, αλλά όχι μονομορφισμος; Δυϊκά, υπάρχει μονομορφισμός, ο οποίος δεν είναι επιμορφισμός;

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω $\langle a \rangle$ η άπειρη κυκλική ομάδα. Για οποιονδήποτε ακέραιο k απολύτως μεγαλύτερο του 1, η απεικόνιση $a \longrightarrow a^k$ ορίζει μονομορφισμός, ο οποίος δεν είναι επιμορφισμός. Τουναντίον, κάθε επιμορφισμός της $\langle a \rangle$ αναγκαστικά θα είναι μονομορφισμός.

Ορισμός 0.1.19. *Μια ομάδα G θα ονομάζεται* **Hopfian** *αν κάθε ενδομορφισμός της, ο οποίος είναι επιμορφισμός, είναι αυτομορφισμός.*

Μια ομάδα G θα ονομάζεται **co-Hopfian** *αν κάθε ενδομορφισμός της, ο οποίος είναι μονομορφισμός, είναι αυτομορφισμός.*

Στην περίπτωση, όπου έχουμε μια ομάδα G, η οποία δεν είναι Hopfian, εμφανίζεται το εξής "παράδοξο". Αν $\vartheta : G \longrightarrow G$ είναι ένας επιμορφισμός, ο οποίος δεν είναι μονομορφισμός, τότε υπάρχει μη τετριμμένος πυρήνας, έστω N, Δηλαδή η G είναι ισομορφη με ένα (γνήσιο) πηλίκο της ($G \approx G/N$). Το "παράδοξο" έγκειται στο γεγονός, ότι αν έχουμε μια παράσταση $G = \langle X \mid R \rangle$ της ομάδας G, η οποία δεν είναι Hopfian, πώς είναι δυνατόν να επισυνάψουμε επιπλέον σχέσεις, οι οποίες δεν "προέρχονται" από τις R και η ομάδα να "παραμένει η ίδια";

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε παραδείγματα non-Hopfian απείρως παραγομένων ομάδων.

Έστω $F = \langle x_1, x_2, ... \rangle$ η ελεύθερη ομάδα με άπειρο το πλήθος γεννήτορες, η απεικόνιση φ με $\varphi(x_1) = x_1$ και $\varphi(x_i) = x_{i-1}$ για $i \geq 2$, προφανώς ορίζει έναν επιμορφισμό της ελεύθερης ομάδας (δεν ξεχνάμε τον ορισμό των ελευθέρων ομάδων), οποίος προφανώς δεν είναι μονομορφισμός.

Στην περίπτωση όπου η ελεύθερη ομάδα είναι πεπερασμενα γεννώμενη δεν μπορούμε να έχουμε μια παρόμοια κατάσταση, διότι, αν έχουμε έναν επιμορφισμό φ, τότε η εικόνα του συνόλου γεννητόρων φ(X) παράγει την ομάδα F, οπότε, αναγκαστικά, θα έχουμε $\mid \varphi(X) \mid \geq \mid X \mid$ (γιατί;;). Άρα τελικά αφού το X είναι πεπερασμένο, θα έχουμε $\mid \varphi(X) \mid = \mid X \mid$ και ο φ είναι αυτομορφισμός.

Το παράδειγμα αυτό είχε δημιουργήσει την εντύπωση ότι μόνο απείρως παραγόμενες non-Hopfian ομάδες υπάρχουν.

Όσπου ανακαλύψανε πεπερασμένα παραγόμενες non-Hopfian ομάδες και "έγινε πάταγος".

Παράδειγμα 0.1.20. *Η ομάδα με παράσταση $G = \langle a, b \mid a^{-1}b^2a = a^3 \rangle$ δεν ειναι Hopfian.*

Ορίζουμε την απεικόνιση $\vartheta : G \longrightarrow G$ με $\vartheta(a) = a$ και $\vartheta(b) = b^2$.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η ϑ ορίζει έναν επιμορφισμό της G. Επειδή η G δεν είναι ελεύθερη ομάδα, το ότι η ϑ επεκτείνεται σε ομομορφιαμό δεν έπεται αυτομάτως. Πρέπει και αρκεί να δούμε ότι "διατηρεί" τις σχέσεις (σε έναν ομομορφισμό ομάδων η εικόνα του ουδετέρου είναι το ουδέτερο της εικόνας). Πράγματι, $\vartheta(a^{-1}b^2a) = ???\vartheta(b^3)$. Η ϑ είναι επί, αφού οι γεννήτορες ανήκουν στην εικόνα ($\vartheta(a) = a$ και $\vartheta(a^{-1}bab^{-1}) = b$). Παρατηρούμε ότι $\vartheta([a^{-1}ba, b]) = [b^3, b^2] = 1$. Άρα το $[a^{-1}ba, b] \in Ker\vartheta$ και τέλος;;;

Όχι ακριβώς, το τελευταίο ερωτηματικό θέλει απάντηση, γιατί $[a^{-1}ba, b] \neq 1$; Αυτό δεν είναι προφανές, αλλά όχι ακατόρθωτο. Προσπαθήστε το!

Έκτοτε έχουν ανακαλυφθεί πολλές κατηγορίες ομάδων πεπερασμένα γεννωμένων non-Hopfian ομάδων και το πρόβλημα έχει αναχθεί σε κεντρικό πρόβλημα στην Θεωρία Ομάδων.

Οι "ρίζες" ξεκινούν απο την Τοπολογία (ο Hopf ήταν επιφανής Τοπολόγος-Γεωμέτρης), όπου τίθεται το εξής πρόβλημα σε αδρές γραμμές: Έστω $(X, \mathcal{T})$, ένας τοπολογικός χώρος. Αν υποθέσουμε ότι στον X έχουμε μια κλάση ισοδυναμίας $\sim$, στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $X/\sim$ επάγεται μια Τοπολογία πηλίκο $\mathcal{T}/\sim$.

Ερώτημα: Υπό ποίες συνθήκες οι τοπολογικοί χώροι $(X, \mathcal{T})$ και $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ είναι ομοιμορφικοί;;;

Το πρόβλημα της Hopficity ομάδων σχετίζεται με το εξής γενικό πρόβλημα:

Έστω $\varphi : A \longrightarrow B$, $\vartheta : B \longrightarrow A$ επιμορφισμοί ομάδων. Είναι οι A, B ισόμορφες;

Έστω A ελεύθερη αβελιανή με αριθμήσιμη διάσταση. Τότε προφανώς $A \times A \approx A$, επίσης, η προσθετική ομάδα των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι πηλίκο (επιμορφική εικόνα) της A, αφού κάθε αβελιανή ομάδα είναι πηλίκο ελεύθερης αβελιανής. Θέτουμε $B = A \times \mathbb{Q}$. Επομένως έχουμε τους προφανής επιμορφισμούς $\varphi : A \approx A \times A \longrightarrow B = A \times \mathbb{Q}$, $\vartheta : B = A \times \mathbb{Q} \longrightarrow A$. Αλλά προφανώς (;;) $A \not\approx A \times \mathbb{Q}$.

Θεώρημα 0.1.21. *Κάθε πεπερασμένα γεννώμενη προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα G είναι Hopfian.*

Απόδειξη. Έστω $\vartheta : G \longrightarrow G$ ένας επιμορφισμός με $Ker\vartheta = K$. Τότε οι ομάδες G και G/K είναι ισόμορφες. Επομένως έχουν τα ίδια "χαρακτηριστικά". Έστω N μια υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη ($|\, G,\ N \,| = n$). Επειδή η G είναι πεπερασμένα γεννώμενη, υπάρχουν πεπερασμένο το πλήθος υποομάδες με τον συγκεκριμμένο δείκτη (ένα επιχείρημα, το οποίο το έχουμε δει - και θα το βλέπουμε - πολλές φορές). Οι G και G/K είναι ισόμορφες, συνεπώς όσες υποομάδες πεπερασμένου δείκτη n έχει η μία, τόσες υποομάδες του ιδίου δείκτη έχει και η άλλη. Αν πάρουμε την πλήρη αντίστροφη εικόνα $\vartheta^{-1}(N)$ προφανώς αυτή είναι δεικτού n και περιέχει τον πυρήνα K, άρα είναι μια από τις πεπερασμένες το πλήθος υποομάδες της G με δείκτη n.

Αυτό το επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη. Δηλαδή η K περιέχεται σε κάθε υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην G, άρα και στην τομή τους. Η G όμως έχει υποτεθεί rf, δηλαδή η τομή όλων των υποομάδων πεπερασμένου δείκτη είναι τετριμμένη. Συνεπώς η K είναι τετριμμένη και τέλος.

□

Παρατηρήσεις 0.1.22.

1. *Η υπόθεση η ομάδα G είναι πεπερασμένα γεννώμενη είναι κρίσιμη, διότι, όπως έχουμε ήδη δει, μια απείρως γεννώμενη ελεύθερη ομάδα είναι μεν rf, δεν είναι όμως Hopfian.*

2. *Υπάρχουν παραδείγματα πεπερασμένα γεννώμενων ομάδων, οι οποίες είναι Hopfian, αλλά δεν είναι rf, συνεπώς στην προηγουμένη πρόταση δεν ισχύει το αντίστροφο.*

   Πληροφοριακά, ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ομάδα με παράσταση $G = \langle a, b \mid a^{-1}b^2a = b^4 \rangle$. Αυτή η ομάδα είναι Hopfian, αλλά δεν είναι rf.

0.1.2 Το γράφημα μιας ομάδας.

Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα.

Υποθέτουμε ότι έχουμε την κυκλική ομάδα $C_{12} = \{1, a, a^2, ..., a^{11}\}$ τάξης 12. Τοποθετούμε τα στοιχεία της στο επίπεδο και πέρνουμε το στοιχείο a και ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Καθε φορά που πολλαπλασιάζουμε ένα στοιχείο της ομάδας αυτής με το στοιχείο a "μεταβαίνουμε" σε ένα άλλο στοιχείο της. Την μετάβαση αυτή την σημειώνουμε με ένα "βέλος", όπου η αρχή του είναι το στοιχείο "αναχώρησης" και το τέλος το σημείο "άφιξης, π.χ. έχουμε την αρχή a^i και το τέλος aa^i. Αυτό το κάνουμε για όλα τα στοιχεία της ομάδας. Τι παρατηρούμε; Σχηματίστηκε ένα γράφημα (στην προκειμένη περίπτωση ένα πολύγωνο), όπου οι κορυφές του είναι τα στοιχεία της ομάδας και οι πλευρές του τα ζεύγη των στοιχείων της μορφής (a^i, aa^i).

Πριν προχωρήσουμε σε ορισμούς και σχετικές παρατηρήσεις/ιδιότητες, ας κάνουμε ένα άλλο παράδειγμα πέρνοντας την ίδια κυκλική ομάδα τάξης 12, αλλά τώρα να πάρουμε το στοιχείο a^2 και να κάνουμε την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως. Τώρα θα σχηματιστεί ένα άλλο γράφημα με κορυφές πάλι τα στοιχεία της ομάδας, αλλά με πλευρές τα ζεύγη της μορφής (a^i, a^2a^i).

Ας κάνουμε ακόμη ένα παράδειγμα πέρνοντας πάλι την ίδια κυκλική ομάδα τάξης 12, αλλά τώρα πέρνουμε ένα υποσύνολό της $S\{\, s_1 = a^3, s_2 = a^4 \,\}$ και σχηματίζουμε ένα άλλο γράφημα με κορυφές πάλι τα στοιχεία της ομάδας, αλλά με πλευρές όλα τα ζεύγη της μορφής (a^i, s_1a^i) και της μορφής (a^i, s_1a^i).

Θα επανέλθουμε στα παραδείγματα, αλλά ας δώσουμε έναν ορισμό.

Ορισμός 0.1.23. *Έστω G μια ομάδα και S ένα υποσύνολό της. Σχηματίζουμε το εξής γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$. Το σύνολο των κορυφών του $V(\mathcal{G})$ αποτελείται από τα στοιχεία της ομάδας G. Το σύνολο των ακμών $E(\mathcal{G})$ αποτελείται από ζεύγη της μορφής (g, sg), για κάθε $g \in G$ και $s \in S$.*

Το γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$ θα ονομάζεται το **γράφημα Cayley** *της ομάδς G ως προς το υποσύνολο S.*

Από τον τρόπο ορισμού του γραφήματος $\mathcal{G}(G, S)$ Cayley της ομάδας G (το βλέπουμε άλλωστε και στα παραδείγματα), η δομή του γραφήματος εξαρτάται, εκτός από την ομάδα G και από την επιλογή του υποσυνόλου S.

Θεώρημα 0.1.24. *Έστω G μια ομάδα και $\mathcal{G}(G, S)$ το γράφημα Cayley ως προς το υποσύνολο S.*

1. *Το γράφημα είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το S παράγει την ομάδα G.*
2. *Το γράφημα περιέχει βρόχους (θηλειές loops) αν και μόνο αν $1_G \in S$.*
3. *Το γράφημα περιέχει μονοπάτια μήκους 2 αν και μόνο αν $S \cap S^{-1} \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι μια ωραία άσκηση. Το συμπέρασμα πολύ σημαντικό. □

Το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει τις πρώτες πληροφορίες για την δομή της G και θα επανέλθουμε επ' αυτού αργότερα.

Θα δούμε πως μπορούμε να αντλήσουμε επιπλέον πληροφορίες για την δομή της ομάδας G μέσω ενός γραφήματος $\mathcal{G}(G, S)$ Cayley.

Ως γνωστόν η ομάδα G δρά (από τα δεξιά) επί του εαυτού της μέσω της πράξης της $((x, g) \longrightarrow xg)$, επομένως δρα επί του συνόλου κορυφών του γραφήματος $\mathcal{G}(G, S)$. Ας πάρουμε τώρα μια ακμή του γραφήματος, δηλαδή ένα ζεύγος (x, sx) με $x \in G$ και $s \in S$, τότε παρατηρούμε ότι, αν το τυχαίο $g \in G$ δράσει στα δύο άκρα της ακμής, θα προκύψει μια άλλη ακμή, το ζεύγος (xg, sxg). Συνεπώς βλέπουμε ότι η δράση της G στις κορυφές "διατηρεί την γειτονία", δηλαδή διατηρεί την δομή του γραφήματος. Συνεπώς έχουμε μια δράση της ομάδας G επί του γραφήματος $\mathcal{G}(G, S)$.

Η "πρόκληση" είναι: Μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την δομή της G μέσω αυτής της δράσης;

Στην αρχή είχαμε δει ότι κάθε δράση μιας ομάδας G επί ενός συνόλου Χ ορίζει και ορίζεται μονοσήμαντα από έναν ομομορφισμό $\varphi : G \longrightarrow S_X$. Μετά είχαμε δεί ότι η δράση της G επί μιας άλλης (αλγεβρικής) δομής R ορίζει και ορίζεται μονοσήμαντα από έναν ομομορφισμό $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(R)$. Εν προκειμένω η δομή που έχουμε είναι το γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$ επομένως η δράση της G επί του $\mathcal{G}(G, S)$ ορίζει και ορίζεται μονοσήμαντα από έναν ομομορφισμό $\varphi : G \longrightarrow Aut(\mathcal{G}(G, S))$.

Γενικά όμως η ομάδα αυτομορφισμών ενός γραφήματος δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί/περιγραφεί. Οπότε, θα έλεγε κάποιος, η ανωτέρω δράση της G στο αντίστοιχο γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$ Cayley δεν προσφέρει στο πρόβλημα της μελέτης της ομάδας G.

Ας υπολογίσουμε την τροχιά μιας κορυφής του γραφήματος (πραγματικότητα ενός στοιχείου της ομάδας G). Προφανώς η δράση είναι μεταβατική και έχουμε μόνο μια τροχιά κορυφών. Αυτό σημαίνει ότι η σταθεροποιούσα μιας (άρα κάθε) κορυφής είναι η τετριμμένη [1]. Αυτό σημαίνει ότι ο παραπάνω ομομορφισμός ομάδων είναι μονομορφισμός ($Ker\varphi = 1$). Δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε την ομάδα G ως υποομάδα της $Aut(\mathcal{G}(G, S))$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την τροχιά μιας ακμής, δηλαδή ενός ζεύγους (x, sx). Παρατηρούμε ότι η τροχιά αυτή περιλαμβάνει όλες τις ακμές που "κατασκευάζονται" από το

[1] Εδώ πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι, γενικά, αν μια ομάδα δρά επί ενός συνόλου, όπου η σαθεροποιούσα κάθε στοιχείου είναι τετριμμένη, τότε η δράση της ομάδας ονομάζεται **ελεύθερη** δράση, ή ότι η ομάδα δρά ελεύθερα επί του συνόλου

στοιχείο $s \in S$ και μόνο αυτές (γιατί;;). Άρα ένας αντιπρόσωπος αυτής της τροχιάς είναι η ακμή $(1, s)$. Επομένως έχουμε τόσες τροχιές ακμών, όσα είναι τα στοιχεία του συνόλου S.

Παραδείγματα 0.1.25. *1. Έστω C_n η κυκλική ομάδα τάξης n και a ένας γεννήτορας, τότε ως γνωστόν το γράφημα $\mathcal{G}(C_n, a)$ Cayley είναι ένα n-γωνο. Ποία είναι ομάδα αυτομορφισμών ενός n-γώνου; Μα φυσικά η διεδρική D_{2n}. Ποίος είναι ομομορφισμός $\varphi : C_n \longrightarrow Aut(\mathcal{G}(C_n, a)) = D_{2n}$; Μα φυσικά αυτός που απεικονίζει τον γεννήτορα a στην απεικονιση στροφής (δεξιόστροφα) κατά γωνία ίση με $2\pi/n$.*

2. *Έστω πάλι C_n η κυκλική ομάδα τάξης n και a ένας γεννήτορας, αν ως S λάβουμε το $S = \{ a^k \}$, όπου ο k δεν είναι πρώτος προς τον n, τότε το γράφημα $\mathcal{G}(C_n, a^k)$ Cayley αποτελείται από $d = l.c.d.(k, n)$ το πλήθος n/d-γωνα ξένα μεταξύ τους (γιατί;) Αυτό το γράφημα, που αποτελείται από d το πλήθος n/d-γωνα, έχει έναν αυτομορφισμό τάξης n, άρα η C_n εμφυτεύται στην ομάδα αυτομορφισμών αυτού του γραφήματος (αναμενόμενο από τα προηγούμενα).*

   Ποιός είναι αυτός ο αυτομορφισμισμός; Δεν είναι δύσκολο να τον προσδιορίσουμε.

   Ας δούμε το πώς: Στις κορυφές ενός n/d-γώνου, που είναι στοιχεία της C_n, δρά ο γεννήτορας a (δηλαδή πολλαπλασιάζουμε κάθε κορυφή με το a. Αυτή η δράση "μεταφέρει" (κυκλικά) το ένα πολύγωνο σε ένα άλλο. Αυτό το κάνουμε d το πλήθος φορές, οπότε φθάνουμε στο αρχικό πολύγωνο, αλλά προσοχή! οι κορυφές του έχουν "μετατοπισθεί κυκλικά κατά μια κορυφή, οπότε επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία $d \cdot n/d = n$ φορές, φθάνουμε (για πρώτη φορά) στην αρχική κατάσταση. Συνεπώς έχουμε έναν αυτομορφισμό του γραφήματος τάξεως n.

   <u>Εφαρμογή:</u> Εφαρμόστε την προηγουμένη διαδικασία σε μια κυκλική ομάδα τάξης 12 μια φορά για $k = 3$ και μια φορά για $k = 4$. Την πρώτη φορά το γράφημα $\mathcal{G}(C_{12}, a^3)$ Cayley αποτελείται από $d = l.c.d.(k, n) = 4$ το πλήθος $n/d = 3$-γωνα και την άλλη το γράφημα $\mathcal{G}(C_{12}, a^4)$ Cayley αποτελείται από $d = l.c.d.(k, n) = 3$ το πλήθος $n/d = 4$-γωνα. Και στις δύο περιπτώσεις οι ομάδα αυτών των γραφημάτων περιέχει ως υποομάδα την C_{12}.

3. *Ας πάρουμε τώρα την άπειρη κυκλική $\mathbb{Z}$ και ως γεννήτορα το 1, τότε προφανώς το γράφημα $\mathcal{G}(\mathbb{Z}, 1)$ Cayley αποτελείται από την γνωστή ευθεία των ακεραίων. Ποιά είναι η ομάδα αυτομορφισμών αυτού του γραφήματος; Μα προφανώς η άπειρη διεδρική D_∞, στην οποία εμφυτεύεται η άπειρη κυκλική.*

4. *Ας πάρουμε πάλι την άπειρη κυκλική $\mathbb{Z}$ και ως $S = \{ 2, 3\}$, τότε το γράφημα $\mathcal{G}(\mathbb{Z}, S)$ Cayley είναι αυτό που έχουμε στο σχήμα (Γ). Επειδή το σύνολο S παράγει την $\mathbb{Z}$, το γράφημα είναι συνεκτικό. Η $\mathbb{Z}$ δρα επί αυτού του γραφήματος μεταβατικά στις ακμές, άρα έχουμε μόνο μια τροχιά κορυφών και δύο τροχιές ακμών, τις $\{ (k, k+2),\, k \in \mathbb{Z} \}$ και την $\{ (k, k+3),\, k \in \mathbb{Z} \}$. Ποία είναι η ομάδα αυτομορφισμών αυτού του γραφήματος, στην οποία γνωρίζουμε, εκ των προτέρων, ότι εμφυτεύται η $\mathbb{Z}$;*

Όπως είχαμε δει το γράφημα μιας ομάδας G ως προς ένα υποσύνολό της S είναι συνεκτικό, αν και μόνο αν το S παράγει την ομάδα. Οπότε, αν έχουμε μια ομάδα με παράσταση $G = \langle S \mid R \rangle$, όπως περιγράψαμε προηγουμένως, μπορούμε να κατασκευάσουμε το (συνεκτικό) γράφημά της $\mathcal{G}(G, S)$.

Οπότε εγείρονται δύο φυσιολογικά ερωτήματα.

1. Αν μας δοθεί ένα συνεκτικό γράφημα, το οποίο είναι το γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$ μιας ομάδας G, μπορούμε να βρούμε την παράσταση της ομάδας $G = \langle S \mid R \rangle$;

Αυτό είναι ο προβληματισμός που θέσαμε στην αρχή. Πως αντλούμε πληροφορίες για την ομάδα μέσω γεωμετρικών/τοπολογικών αντικειμένων.

Προσοχή! Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση με την κατασκευή του γραφήματος της ομάδας, όπου γνωρίζαμε την ομάδα και κατασκεύζαμε το γράφημά της. Εδώ έχουμε το αντίστροφο πρόβλημα.

Το δεύτερο ερώτημα είναι πιό ''απαιτητικό''.

2. Αν μας δοθεί ένα συνεκτικό γράφημα. Μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι το γράφημα κάποιας ομάδας; Οπότε, βάσει του πρώτου ερωτήματος, να αναζητήσουμε ποία πράσταση ομάδας ''αναπαριστά'';

Πιο αυστηρά. Ποιές αναγκαίες (και ικανές) συνθήκες πρέπει να πληροί ένα συνεκτικό γράφημα για να είναι το γράφημα μιας ομάδας;

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα: Αν μας δοθεί ένα πολύγωνο με n το πλήθος κορυφές, αυτό είναι το γράφημα της κυκλικής τάξεως n.

Αν μας δοθεί ένα γράφημα ''τρίποδο'' (δηλαδή ένα γράφημα με τέσσερεις κορυφές και τρείς ακμές, είναι αυτό το γράφημα κάποιας ομάδας;

Η απάντηση είναι προφανώς όχι (γιατί;;). Μα αν ήταν το γράφημα μιας ομάδας, αυτή θα είχε τέσσερα στοιχεία. Γνωρίζουμε ότι μια ομάδα με τέσσερα στοιχεία είναι είτε κυκλική, είτε το ευθύ γινόμενο δύο κυκλικών ομάδων τάξης 2, με αντίστοιχα γραφήματα (σχήμα Γ).

Υπάρχει ένα θεώρημα (δεν είναι επί του παρόντος) όπου δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το πότε ένα γράφημα είναι το γράφημα μιάς παράστασης ομάδας.

0.1.3 Γραφήματα.

Μέχρι τώρα, χωρίς βλάβη, 'χρησιμοποιήσαμε' τα γραφήματα διαισθητικά. Χωρίς να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό του τι εννοούμε γράφημα.

Συνήθως δίνεται ο εξής ορισμός:

Γράφημα είναι ένα ζεύγος συνόλων (V, E) με την ιδιότητα: Το σύνολο E είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $V \times V$. Το (μη κενό) σύνολο V το ονομάζουμε σύνολο κορυφών και το (ενδεχομένως κενό) σύνολο E το ονομάζουμε σύνολο ακμών.

Στον ορισμό δεν γίνεται καμία νύξη κατά πόσον αν το ζεύγος $(v, u) \in E$, τότε και το ζεύγος $(u, v) \in E$.

Αυτό δημιουργούσε προβλήματα. Οπότε ''πλουτίσανε'' τον προηγούμενο ορισμό θέτοντας επιπλέον τον όρο. Κάθε φορά που το $(v, u) \in E$, τότε και το $(u, v) \in E$. Οπότε μπορούσε να οριστεί ''προσανατολισμός'' στο γράφημα με $e = (v, u)$ και $\bar{e} = (u, v)$ και φυσικά $\bar{\bar{e}} = e$.

Αυτή η προσθήκη στον ορισμό έλυνε ορισμένα προβλήματα, αλλά όχι όλα. Πρώτον, σε μια ακμή, όπου τα άκρα συνέπιπταν (ένας βρόχος) $e = (v, v)$ δεν έχουμε προσανατολισμό (ή μάλλον ο προσαναολισμός συνχέεται), καθότι $e = \bar{e}$.

Δεύτερον, παραμένει η αδυναμία μεταξύ δύο κορυφών v και u να μπορούμε να ορίσουμε περισσότερες της μιάς ακμές, όπως έχουμε δεί στα προηγούμενα παραδείγματα.

Αυτά τα προβλήματα αίρονται δίνοντας έναν άλλο ορισμό του γραφήματος.

Ορισμός 0.1.26. *Ένα γράφημα $\mathcal{G}(V, E)$ αποτελείται από δύο σύνολα, το V (το σύνολο κορυφών, το οποίο θεωρούμε μη κενό), το E (το σύνολο των ακμών, το οποίο ενδέχεται να είναι το κενό) και από δύο απεικονίσεις $o : E \longrightarrow V$ και $- : E \longrightarrow E$ με τις ιδιότητες $e \neq \bar{e}$ και $\bar{\bar{e}} = e$.*

Σχόλια 0.1.27. *Η εικονα $\bar{e}$ θα ονομάζεται* **αντίστροφη** *της ακμής e.*

Η εικόνα $o(e)$ θα ονομάζεται **αρχή** *της ακμής e.*

Την εικόνα $o(\bar{e})$ θα ονομάζεται **τέλος** *της ακμής e και θα συμβολίζεται $t(e)$.*

Αν θέλαμε να είμαστε (αρτηριωτικά) εντάξει η t είναι η σύνθεση των απεικονισεων $-$ και o $(t = o \circ -)$.

Επειδή, η απεικόνιση o δεν είναι κατ' ανάγκη 1-1, μπορούμε μεταξύ δύο κορυφών ενός γραφήματος να ορίσουμε δύο διαφορετικές ακμές και όχι όπως είχαμε τον περιορισμό, όταν θεωρούσαμε το $E \subseteq V \times V$.

Ένας **προσανατολισμός** *ενός γραφήματος είναι μια διαμέριση του συνόλου* $E = E^+ \cup E^-$ *με την ιδιότητα* $e \in E^+ \iff \bar{e} \in E^-$*.*

Κάποια ορολογία.

Ένα γράφημα θα ονομάζεται **τμήμα, ή "ακμή"**, αν το σύνολο των κορυφών του αποτελείται από δύο στοιχεία και το σύνολο των ακμών από δύο ακμές (τις e και $\bar{e}$).

Το μη διατεταγμένο ζεύγος $(e, \bar{e})$ αποτελεί μια **γεωμετρική ακμή** του γραφήματος.

Δύο ακμές e_1, e_2 ενός γραφήματος θα ονομάζονται **διαδοχικές** αν $t(e_1) = o(e_2)$.

Μια ακολουθία ακμών $P : e_1, e_2, \dots, e_n$ θα ονομάζεται **μονοπάτι** αν $o(e_{i+1}) = t(e_i)$, $i = 1, \dots, n-1$ (διαδοχικές ακμές). Οι κορυφές $o(P) = o(e_1)$ και $t(P) = t(e_n)$ αποτελούν τα **άκρα** του μονοπατιού. Αν μια ακολουθία διαδοχικών ακμών είναι άπειρη, τότε έχουμε ένα άπειρο μονοπάτι.

Για κάθε μονοπάτι $P : e_1, e_2, \dots, e_n$ ορίζεται το **αντίστροφο** μονοπάτι $\bar{P} : \bar{e_n}, \bar{e}_{n-1}, \dots, \bar{e}_1$ με $o(\bar{P}) = o(\bar{e}_n) = t(e_n) = t(P)$ και $t(\bar{P}) = t(\bar{e}_1) \cdots o(P)$.

Ένα μονοπάτι θα ονομάζεται **ανηγμένο**, αν δεν υπάρχει i με $e_i = \bar{e}_{i+1}$ (δεν υπάρχουν διαδοχικές ακμές, οι οποίες η μία να είναι αντίστροφη της άλλης).

Στην περίπτωση, όπου έχουμε διαδοχικές ακμές, οι οποίες η μια είναι αντίστροφη της άλλης, λέμε ότι έχουμε μια **παλλινδρόμηση**. Προφανώς, αν έχουμε ένα μονοπάτι όπου εμφανίζεται μια παλλινδρόμηση $\cdots e_{i-2}\, e_{i-1}\, e_i\, e_{i+1}\, e_{i+2} \cdots$ με $e_i = \bar{e}_{i+1}$, τότε $t(e_{i-1}) = o(e_i) = t(e_{i+1}) = o(e_{i+2})$, άρα οι ακμές e_{i-1} και e_{i+2} είναι διαδοχικές. Οπότε, "διαγράφοντας/αγνοώντας" τις ακμές e_i και e_{i+1}, έχουμε ένα άλλο μονοπάτι. Προφανώς η διαδικασία είναι "αντιστρεπτή". Κάθε φορά που έχουμε διαγράψει μια παλλινδρόμηση, μπορούμε να την "επαναφέρουμε". Όπως επίσης, γενικά μπορούμε να εισάγουμε παλλινδρομήσεις.

Προφανώς ένα μονοπάτι P είναι ανηγμένο αν και μόνο αν το αντίστροφό του $\bar{P}$ είναι ανηγμένο.

Προφανώς, μεταξύ δύο μονοπατιών P_1 και P_2 σε ένα γράφημα ορίζεται μια σχέση $P_1 \sim P_2$, αν μπορούμε να μεταβούμε από το ένα στο άλλο με μια σειρά διαδικασιών διαγραφής, ή εισαγωγής παλλινδρομήσεων σε πεπεραμένα βήματα.

Η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας (αποδείξτε το!) και σε κάθε κλάση ισοδυναμίας αντιστοιχεί ακριβώς ένα ανηγμένο μονοπάτι.

Το πλήθος των ακμών ενός ανηγμένου μονοπατιού, θα ονομάζεται **ανηγμένο μήκος** του μονοπατιού και είναι καλά ορισμένο (γιατί;;).

Ένα ανηγμένο μονοπάτι χωρίς ακμές (αποτελούμενο από μια μόνο κορυφή) θα έχει μηδενικό ανηγμένο μήκος. Το μονοπάτι αυτό θα ονομάζεται μηδενικό, ή τετριμμένο μονοπάτι

Ένα μονοπάτι P με κοινά άκρα ($o(P) = t(P)$) θα ονομάζεται κλειστό, ή **κύκλωμα**.

Προφανώς το αντίστοιχο ανηγμένο μονοπάτι ενός κλειστού μονοπατιού είναι και αυτό κλειστό. Προσοχή! ενδέχεται αυτό το κλειστό μονοπάτι να είναι τετριμμένο.

Ένα γράφημα $\mathcal{G}(V, E)$ θα ονομάζεται **συνεκτικό** αν για κάθε δύο κορυφές v, u υπάρχει (τουλάχιστον) ένα μονοπάτι P με $o(P) = v$ και $t(P) = u$. Προφανώς, αν υπάρχει ένα μονοπάτι που συνδέει δύο κορυφές ενός γραφήματος, τότε υπάρχει και (το αντίστοιχο) ανηγμένο μονοπάτι που τις συνδέει. Ένα τέτοιο μονοπάτι θα ονομάζεται **γαιωδεσιακή (γεωδαισιακή)** μεταξύ των δύο κορυφών.

Προσοχή! Ενδέχεται μεταξύ δύο κορυφών ενός γραφήματος να υπάρχουν πολλά ανηγμένα μονοπάτια, τα οποία τις ενώνουν.

Πρόταση 0.1.28. *Έστω v, u δύο κορυφές ενός γραφήματος. Οι κορυφές αυτές είναι κορυφές ενός κυκλώματος αν και μόνο υπάρχουν (τουλάχιστον) δύο διαφορετικά μονοπάτια P_1, P_2 με $o(P_1) = o(P_2) = v$ και $t(P_1) = t(P_2) = u$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη αφίεται ως άσκηση. Προσοχή! δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι οι δύο κορυφές είναι διακεκριμένες.

□

Ένα γράφημα θα ονομάζεται **δάσος** αν δεν περιέχει ανηγμένα κυκλώματα με μήκος μεγαλύτερο, ή ίσον του 1.

Ένα γράφημα, το οποίο είναι συνεκτικό και δάσος, θα ονομάζεται **δένδρο**.

Έστω $\mathcal{G}(V, E)$ ένα γράφημα. Ένα **υπογράφημα** αποτελείται από δύο σύνολα $V_1 \subseteq V$ και $E_1 \subseteq E$ με τις ιδιότητες: $o(e) \in V_1$ και $\bar{e} \in E_1$ για κάθε $e \in E_1$.

Προσοχή! Ενδέχεται να υπάρχουν ακμές, οι οποίες δεν ανήκουν στο υποσύνολο E_1 ενώ τα άκρα τους (το ένα, ή και τα δύο) να ανήκουν στο V_1.

Επομένως, αν το E_1 είναι γνήσιο υποσύνολο του E, έχουμε ένα γνήσιο υπογράφημα, χωρίς κατ' ανάγκη το V_1 να είναι γνήσιο υποσύνολο του V.

<u>Ερώτημα:</u> Υπάρχει περίπτωση να έχουμε γνήσιο υπογράφημα με $V \neq V_1$, αλλά $E = E_1$;

Ορισμός 0.1.29. *Ένας* **ομομορφισμός** *μεταξύ των γραφημάτων* $\mathcal{G}(V_1, E_1)$ *και* $\mathcal{G}(V_2, E_2)$ *αποτελείται από δύο απεικονίσεις* $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ *και* $\vartheta : E_1 \longrightarrow E_2$ *με τις ιδιότητες:* $\varphi(o(e)) = o(\vartheta(e))$ *και* $\vartheta(\bar{e}) = \overline{\vartheta(e)}$ *για κάθε* $e \in E_1$.

Μια άμεση συνέπεια του ορισμού αυτού είναι ότι η απεικόνιση φ "διατηρεί την γειτονία". Πράγματι, $\varphi(t(e)) = \varphi(o(\bar{e})) = o(\vartheta(\bar{e})) = o(\overline{\vartheta(e)}) = t(\vartheta(e))$. Δηλαδή η εικόνα της αρχής μιας ακμής μέσω του φ και η εικόνα του τέλους της είναι η αρχή και το τέλος αντίστοιχα της αρχής και του τέλους της εικόνας της ακμής αυτής μέσω του ϑ.

Οι έννοιες του ενδομορφισμού, μονομορφισμού, επιμορφισμού, ισομορφισμού και αυτομορφισμού γραφημάτων ορίζονται πλέον *αναλόγως*.

Θα επισημάνουμε μια χαρακτηριστική, μόνο, ιδιότητα ενδομορφισμού γραφημάτων.

Έστω ένα γράφημα $\mathcal{G}(V, E)$ και ένας ενδομορφισμός του με την ιδιότητα: Υπάρχει $e \in E$ έτσι ώστε $\vartheta(e) = \bar{e}$. Τότε, από τις ιδιότητες του ομομορφισμού, έχουμε ότι $\vartheta(\bar{e}) = \overline{\vartheta(e)} = \bar{\bar{e}} = e$ και $\varphi(o(e)) = o(\vartheta(e)) = o(\bar{e}) = t(e)$ και $\varphi(t(e)) = t(\vartheta(e)) = t(\bar{e}) = o(e)$.

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ο ενδομορφισμός *αντιστρέφει* την ακμή e.

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με ενδομορφισμούς που δεν αντιστρέφουν ακμές και θα το επισημαίνουμε.

Το γράφημα της ελεύθερης ομάδας.

Πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή του γραφήματος Cayley μιας ελεύθερης ομάδας, ας κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις υπό το πνεύμα των αντίστοιχων ορισμών που δώσαμε.

Έστω $\mathcal{G}(G, S)$ το γράφημα Cayley μιας ομάδας G ως προς ένα υποσύνολό της S.

Οι ακμές του γραφήματος ήταν της μορφής (x, sx), όπου $x \in G$ και $s \in S$ και τις θεωρούσαμε "γεωμετρικές". Δεν είχαμε μιλήσει για αντίστροφες ακμές. Τώρα μπορούμε σε κάθε μια από αυτές τις ακμές να ορίσουμε την αντίστροφή της $\overline{(x, sx)} =: (sx, x)$. Σύμφωνα με τον ορισμό της αντιστρόφου ακμής πρέπει $\overline{(x, sx)} =: (sx, x) \neq (x, sx)$, δηλαδή πρέπει και αρκεί $s \neq 1$ (ιδέ το (ii) του Θεωρήματος 0.1.24).

Επομένως στο εξής θα θεωρούμε ότι $1 \notin S$.

Προφανώς έχουμε $\overline{(x, sx)} =: (sx, x) = (sx, s^{-1}(sx))$. Αυτό "Επεκτείνει" τον Ορισμό 0.1.23 καθ' ότι οι αντίστροφες ακμές ορίζονται με πρόμοιο τρόπο, όπου τώρα "χρησιμοποιούμε" και τα στοιχεία s^{-1}, για $s \in S$.

Πριν προχωρήσουμε πρέπει να διευκρινίσουμε ότι η αντίστροφη της ακμής (x, sx) **δεν** είναι η ακμή $(x, s^{-1}x)$, όπως, ίσως, θα μπορούσε να μας "παρασύρει" η διαίσθησή μας. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $(x, s^{-1}x) = \overline{(x, sx)} =: (sx, x)$, τότε πρέπει αναγκαστικά $s = 1$, το οποίο στο εξής το έχουμε αποκλείσει.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε προσανατολισμό στο γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$ Cayley μιας ομάδας G ορίζοντας $E^+ = \{(x, sx) \mid x \in G, s \in S\}$ και $E^- = \{(x, s^{-1}x) \mid x \in G, s \in S\}$.

Εδώ πρέπει να διευκρινίσουμε, ότι σύμφωνα με τον οριμό του προσανατολισμού ενός γραφήματος, τα δύο σύνολα E^+ και E^- πρέπει να είναι ξένα μεταξύ τους. Γενικά ενδέχεται να έχουμε κοινό στοιχείο $e \in E^+ \cap E^-$. Αυτό σημαίνει ότι $e = (x, s_1x) = (y, s_2^{-1}y)$ με $s_1, s_2 \in S$, δηλαδή $x = y$ και $s_1 = s_2^{-1}$, άρα το σύνολο S ανήκουν και το s και το s^{-1} (ιδέ το (iii) του Θεωρήματος 0.1.24, όπως και τα παραδείγματα των διεδρικών ομάδων, όπου είχαμε στοιχεία τάξεως 2).

Άρα συμπερασματικά, με την υπόθεση ότι το $1 \notin S$, και $S \cap S^{-1} = \emptyset$ έχουμε ότι το γράφημα Cayley $\mathcal{G}(G, S)$ μιας ομάδας G "υπακούει" στον Ορισμό 0.1.26.

Είχαμε δεί ότι η ομάδα δρα στο γράφημά της. Άρα ορίζεται ένας ομομορφισμός ομάδων $G \longrightarrow Aut(\mathcal{G}(G, S))$. Έστω $g \in G$, ας εξετάσουμε πότε ο επαγόμενος αυτομορφισμός αντιστρέφει ακμές του γραφήματος. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια ακμή (x, sx) του γραφήματος, η οποία αντιστρέφεται από τον επαγώμενο αυτομορφισμό. Τότε έχουμε $(x, sx) \cdot g = (xg, sxg) = (sx, x)$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει (και αρκεί) να ισχύει $xg = sx$ και $sxg = x$, δηλαδή $s^2 = 1$. Άρα η μόνη περίπτωση για να αντιστρέφονται ακμές από την δράση της G στο γράφημα Cayley $\mathcal{G}(G, S)$ είναι το σύνολο S να περιέχει στοιχεία τάξης 2.

Έχοντας υπ' όψη και τα προηγούμενα παραδείγματα, παρατηρούμε ότι στο γράφημα Cayley $\mathcal{G}(G, S)$ μιας ομάδας G υπάρχουν κυκλώματα αν και μόνο αν υπάρχουν $g_1, g_2, \ldots, g_n$ στοιχεία της ομάδας G (οι κορυφές του κυκλώματος) και $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$ (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά) με την ιδιότητα $g_2 = s_1g_1, \ldots, g_{i+1}\, s_ig_i, \ldots, g_n = s_{n-1}g_{n-1}, g_1 = s_ng_n$. Οπότε αντικαθιστώντας, αναδρομικά, έχουμε $g_1 = s_ns_{n-1}\cdots s_1g_1$,
δηλαδή $s_ns_{n-1}\cdots s_1 = 1$. Αυτό σημαίνει ότι τα κυκλώματα σε ένα γράφημα Cayley $\mathcal{G}(G, S)$ μιας ομάδας G "αναπαριστούν" σχέσεις της ομάδας, οι οποίες γράφονται ως γινόμενα στοιχείων του συνόλου S.

Στην περίπτωση όπου το σύνολο S αποτελεί ένα σύνολο γεννητόρων της ομάδας G, τότε έχουμε ένα συνεκτικό γράφημα, το οποίο "αναπαριστά" την παράσταση της ομάδας.

Παραδείγματα 0.1.30. *1. Όλα τα παραδείγματα κυκλικών, διεδρικών ομάδων που έχουμε δεί.*

2. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα κύκλωμα, όπως προηγουμένως, αν "διατρέξουμε" το κύκλωμα από την ανάστροφη σειρά, τότε βλέπουμε ότι, αντί των διαδοχικών ακμών $(g_1, s_1g_1), (g_2, s_2g_2), \ldots, (g_n, s_ng_n = g_1)$, *Θα έχουμε τις αντίστροφες με την ανάστροφη σειρά*

$(g_1, g_n = s_n^{-1}g_1), \ldots, (g_2, s_1^{-1}g_2 = g_1)$, *οπότε πάλι έχουμε* $g_1 = s_1^{-1}s_2^{-1}\cdots s_{n-1}^{-1}g_n^{-1}g_1$.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε ότι αν θέλουμε να πάρουμε το γράφημα μιας ομάδας G ως προς ένα σύνολο γεννητόρων της S, τότε, χωρίς βλάβη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $1 \notin S$ (το ουδέτερο στοιχείο δεν "προσφέρει" στην παραγωγή μας ομάδας). Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι $S \cap S^{-1} = \emptyset$, καθότι, αν ένα στοιχείο s είναι γεννήτορας μιας ομάδας, τότε η προσθήκη στο σύνολο γεννητόρων της ομάδας και του αντιστρόφου s^{-1} δεν "προσφέρει" στην παραγωγή μας ομάδας. Οπότε το γράφημα της ομάδας είναι συνεκτικό, δεν περιέχει βρόχους, δεν περιέχει κυκλώματα μήκους 2 (δηλαδή είναι προσανατολισμένο). Η **μόνη** εξαίρεση είναι το σύνολο γεννητόρων S να περιέχει στοιχείο s τάξης 2, οπότε δεν μπορούμε να αποφύγουμε το $s = s^{-1} \in S$. Αυτή η τελευταία περίπτωση αντιμετωπίζεται διαφορετικά, αλλά δεν είναι επί του παρόντος.

Θεώρημα 0.1.31. *Έστω $F = \langle X \rangle$ μια ελεύθερη ομάδα επί του συνόλου ελευθέρων γεννητόρων X. Το γράφημα Cayley $\mathcal{G}(F, X)$ της F είναι δένδρο.*

Απόδειξη. Το σύνολο X παράγει την ομάδα, δεν περιέχει το ουδέτερο στοιχείο, αν $s \in X$, τότε $s^{-1} \notin X$. Άρα είναι ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς βρόχους και κυκλώματα μήκους 2.

Αν τώρα περιέχει ένα ανηγμένο κύκλωμα με μήκος μεγαλύτερο ή ίσον του 3, τότε, σύμφωνα με την ανάλυση που είδαμε προηγουμένως, θα έχουμε ένα στοιχείο $w \in F$, δηλαδή μια ανηγμένη λέξη, $w = 1$, άτοπο από τον (ισοδύναμο) ορισμό της ελεύθερης ομάδας. Δηλαδή το $\mathcal{G}(F, X)$ είναι δένδρο.

$\square$

Συνοψίζοντας, αν έχουμε μια ομάδα G και S ένα σύνολο γεντόρων της (με τον περιορισμό, το S να μην περιέχει στοιχεία τάξης 2), τότε ορίζεται ένα ένα συνεκτικό γράφημα, Cayley γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$ της G, επί του οποίου η ομάδα G δρά ελεύθερα και χωρίς αντιστροφές.

Μάλιστα αποδείξαμε ότι το Cayley γράφημα μιας ελεύθερης ομάδας είναι δένδρο.

Όλα αυτά είχαν σαν ''αφετηρία'' ότι γνωρίζαμε (έστω και ''ελαφρώς'') την ομάδα.

Ας επανέλθουμε στα ερωτήματα που είχαμε θέσει:

---

1. Αν μας δοθεί ένα συνεκτικό γράφημα, το οποίο είναι το γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$ μιας ομάδας G, μπορούμε να βρούμε την παράσταση της ομάδας $G = \langle S \mid R \rangle$;

Αυτό είναι ο προβληματισμός που θέσαμε στην αρχή. Πως αντλούμε πληροφορίες για την ομάδα μέσω γεωμετρικών/τοπολογικών αντικειμένων.

Προσοχή! Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση με την κατασκευή του γραφήματος της ομάδας, όπου γνωρίζαμε την ομάδα και κατασκεύζαμε το γράφημά της. Εδώ έχουμε το αντίστροφο πρόβλημα.

Το δεύτερο ερώτημα είναι πιό ''απαιτητικό''.

2. Αν μας δοθεί ένα συνεκτικό γράφημα. Μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι το γράφημα κάποιας ομάδας; Οπότε, βάσει του πρώτου ερωτήματος, να αναζητήσουμε ποία πράσταση ομάδας ''αναπαριστά'';

Στα ερωτήματα αυτά δεν ετίθετο η δράση της ομάδας επί των αντιστοίχων γραφημάτων. Τώρα τίθεται ένα άλλο ερώτημα.

3. Αν έχουμε την δράση μιας τυχαίας ομάδας G επί ενός τυχαίου γραφήματος $\mathcal{G}$, μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την ομάδα (και για το γράφημα) από τις πληροφορίες που μας δίνει η δράση (τροχιές, σταθεροποιούσες, $\varphi : G \longrightarrow Aut(\mathcal{G})$ ...) ;;;;

Στο πρόβλημα αυτό θα ''ενσκύψουμε'' ....του χρόνου .....