0.1 Σειρές.

Ορισμοί.

Έστω G μια ομάδα και H μια κανονική υποομάδα της, τότε, ως γνωστόν, ορίζεται η ομάδα πηλίκο G/H. Ένα από τα προβλήματα/πρόκληση, που αντιμετωπίζουμε, είναι το πώς θα "αντλήσουμε" πληροφορίες για τις ιδιότητες της ομάδας G μελετώντας τις ομάδες H και G/H. Γενικότερα, πώς θα αντλήσουμε πληροφορίες για μια από τις ομάδες G, H, G/H μλετώντας τις άλλες δύο.

Όταν όμως έχουμε μια ομάδα G και μια υποομάδα της H, η οποία δεν είναι κανονική, τότε, επείδη το πηλίκο G/H δεν ορίζεται, αναζητούμε αν υπάρχει μια ακολουθία υποομάδων

$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$, όπου με αυτόν τον τρόπο να *προσεγγίζουμε* την G.

Προσοχή! Κάθε H_{i-1} είναι κανονική στην επομένη της H_i, αλλά δεν είναι κατ'ανάγκη κανονική στην ομάδα G.

Αν υπάρχει μια τέτοια ακολουθία, τότε αυτή θα ονομάζεται **(υπο)κανονική σειρά** με αρχικό όρο την υποομάδα H και τελικό όρο την ομάδα G, οι ομάδες H_{i-1}/H_i τα **πηλίκα** της σειράς, το δε πλήθος n θα ονομάζεται το **μήκος** της σειράς.

Εξυπακούεται ότι οι όροι μια σειράς είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Μερικές φορές, για τεχνικούς λόγους, θα επιτρέπουμε να έχουμε δύο διαδοχικούς όρους ίσους.

Πριν ό,τιδήποτε άλλο να διευκρινίσουμε ότι στην περίπτωση όπου κάθε όρος της σειράς είναι κανονική υποομάδα στην ομάδα G, τότε έχουμε μια **κανονική** σειρά. (Πολλοί αναφέρουν όλες τις σειρές αυτού του είδους ως κανονικές σειρές. Εδώ θα το διευκρινίζουμε κάθε φορά, όταν υπάρχει κίνδυνος να προκληθεί σύγχυση.)

Μετά τους ορισμούς και τις διευκρινίσεις, ας δούμε μερικά ερωτήματα που εγείρονται.

1. Μεταξύ μιας υποομάδας H και της ομάδας G μπορούν υπάρξουν σειρές και πόσες;

2. Το μήκος δύο σειρών είναι πάντα σταθερό;

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Έστω $G = \langle a \rangle$ η άπειρη κυκλική και $H = \langle a^{pqr} \rangle$, όπου p, q, r πρώτοι αριθμοί, τότε μπορούμε να βρούμε πολλές σειρές μεταξύ της H και της G. Ας δούμε μερικές εξ αυτών:

Προφανώς η $H < G$ είναι μια κανονική σειρά. Αλλά βλέπουμε ότι η

$H < \langle a^p \rangle < G$ είναι μια άλλη σειρά, όπως και ή

$H < \langle a^{pq} \rangle < \langle a^p \rangle < G$. Όπως βλέπουμε κάθε μια από αυτές προέρχεται από την προηγούμενη παρεμβάλοντας έναν ενδιάμεσο όρο. Αν όμως προσπαθήσουμε στην τελευταία σειρά να παρεμβάλουμε (γνησίως) άλλους όρους, τότε αυτό δεν είναι δυνατόν (γιατί;).

Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις ας δώσουμε δύο ορισμούς:

Έστω $H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$ και

$H = K_0 \lhd K_1 \lhd K_2 \cdots \lhd K_{m-1} \lhd K_m = G$ δύο σειρές.

Η δεύτερη σειρά θα ονομάζεται (γνήσια) **επιλέπτυνση** της πρώτης, αν "προέρχεται" από την πρώτη δια της παρεμβολής κάποιων όρων. Αν θέλουμε να το εκφράσουμε τυπικά. Η δεύτερη είναι επιλέπτυνση της πρώτης αν υπάρχουν όροι K_{j_i} ούτως ώστε $H_i = K_{j_i}$ (όπου οι δείκτες κινούνται αναλόγως). Όπου, οι όροι της δεύτερης σειράς είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και $n < m$ (εξ ού το γνήσια). Στην τρίτη σειρά όμως στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι δεν μπορούμε να παρεμβάλουμε όρους ώστε να επιτύχουμε μια γνήσια επιλέπτυνση. Η περίπτωση αυτή υπακούει στον εξής ορισμό:

Μια σειρά θα ονομάζεται **συνθετική**, αν δεν επιδέχεται γνήσιες επιλεπτύνσεις.

Συνθετικές, ισοδύναμες (ισόμορφες) σειρές

Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν έχουμε μια σειρά, κατά πόσο μπορούμε με (διαδοχικές) επιλεπτύνσεις να φθάσουμε σε μια συνθετική σειρά. Επίσης, πώς αναγνωρίζουμε αν μια σειρά είναι συνθετική.

Προφανώς, αν έχουμε την σειρά

$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$ με την H πεπερασμένου δείκτη, τότε αυτή μπορεί να επιλεπτυνθεί σε μία συνθετική σειρά.

Ειδικότερα, κάθε σειρά μιας πεπερασμένης ομάδας μπορεί να επιλεπτυνθεί σε μια συνθετική σειρά.

Αν έχουμε όμως την άπειρη κυκλική ομάδα $G = \langle a \rangle$, τότε η σειρά $1 \lhd G$ δεν μπορεί να επιλεπτυνθεί σε συνθετική σειρά (γιατί;)

Πρόταση 0.1.1. *Η σειρά $H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$ είναι συνθετική αν και μόνο αν κάθε πηλίκο H_{i-1}/H_i είναι απλή ομάδα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι κάθε πηλίκο είναι απλή ομάδα, και ότι υπάρχουν δύο διαδοχικοί όροι H_{i-1}, H_i, όπου μπορούμε να παρεμβάλουμε γνησίως την υποομάδα $H_{i-1} \lhd K \lhd H_i$, τότε στα αντίστοιχα πηλίκα έχουμε $K/H_{i-i} \lhd H_i/H_{i-1}$ με τις ανισώσεις γνήσιες, άτοπο.

Όμοια για το αντίστροφο.

□

Όπως είδαμε, αν έχουμε δύο σειρές, τότε μπορούμε να τις "συγκρίνουμε" με το αν η μια είναι επιλέπτυνση της άλλης.

Μάλιστα δέ αυτό το μέτρο σύγκρισης προφανώς(;;) ορίζει μια σχέση μερικής διάταξης στο σύνολο των σειρών (με την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος).

Το ερώτημα, το οποίο προκύπτει τώρα είναι το εξής: Αν έχουμε δύο σειρές (με ίδια αρχή και τέλος), θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα "άλλο μέτρο" σύγκρισης;

Ορισμός 0.1.2. *Οι σειρές*

$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$ *και*

$H = K_0 \lhd K_1 \lhd K_2 \cdots \lhd K_{m-1} \lhd K_m = G$

θα ονομάζονται **ισοδύναμες** *αν υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των των πηλίκων της μιας σειράς και των πηλίκων της άλλης, όπου αντίστοιχα πηλίκα είναι ισόμορφα.*

"Τυπολατρικά" οι δύο σειρές ονομάζονται ισοδύναμες αν $n = m$ και υπάρχει μια μετάθεση π των δεικτών, ώστε $H_{i-1}/H_i \approx K_{\pi(i)-1}/K_{\pi(i)}$.

Προσοχή ! Παρ' όλο που λέμε στον ορισμό υπάρχει μια μετάθεση δεικτών.... Πολλοί θεωρούν ότι αναγκαστικά $H_{i-1}/H_i \approx K_{i-1}/K_i$ για όλα τα i.

Για παράδειγμα: Έστω $G = \langle a \rangle$ η άπειρη κυκλική και οι σειρές

$H_0 = \langle a^{pq} \rangle < \mathrm{H}_1 = \langle a^p \rangle < H_2 = \langle a \rangle$ και $\mathrm{K}_0 = \langle a^{pq} \rangle < K_1 = \langle a^q \rangle < K_2 = \langle a \rangle$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί, τότε $H_1/H_0 \approx K_2/K_1$ και $H_2/H_1 \approx K_1/K_0$.

Μάλιστα δέ αυτό το μέτρο σύγκρισης προφανώς(;;) ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των σειρών (με την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος).

Λόγω του ισομορφισμού μεταξύ των πηλίκων δύο ισοδυνάμων σειρών πολλές φορές αυτές τις σειρές θα τις αποκαλούμε και ισόμορφες.

Ένα άλλο πρόβλημα που προκύπτει είναι το εξής:

Όταν έχουμε μια σειρά, μπορούμε να "αναπτύξουμε μια μέθοδο" ώστε να επιτυγχάνουμε επιλεπτύνσεις της, ή κάθε φορά θα επιχειρούμε κατά το δοκούν;

Ας δούμε μερικά αποτελέσματα, τα οποία έχουν το δικό τους ενδιαφέρον.

Λήμμα 0.1.3. *Έστω A, B, C υποομάδες μια ομάδας G με $B \leq A$. Δείξτε ότι $A \cap (BC) = B(A \cap C)$.*

(Προσοχή! Τα $A \cap (BC)$ και $B(A \cap C)$ ενδέχεται να μην είναι υποομάδες της G

Απόδειξη. Είναι η πρώτη άσκηση στην τρίτη ομάδα ασκήσεων.

□

Λήμμα 0.1.4. *Έστω $B \lhd A \leq G$ και $C \leq G$, τότε $B \cap C \lhd A \cap C$ και $(A \cap C)/(B \cap C) \approx B(A \cap C)/B$.*

Αν επιπλέον $C \lhd G$, τότε $BC \lhd AC$ και $AC/BC \approx A/B(A \cap C)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι προφανής και χρησιμοποιεί το δεύτερο Θεώρημα των ισομορφισμών.

Ας αποδείξουμε την $(A \cap C)/(B \cap C) \approx B(A \cap C)/B$.

Έχουμε $(A \cap C)/(B \cap C) = (A \cap C)/(\mathrm{A} \cap C) \cap B \approx B(A \cap C)/B$

(στην πρώτη ισότητα δεν κάναμε τίποτε άλλο απ' το να τμήσουμε με μια μεγαλύτερη ομάδα, την A, οπότε το αποτέλεσμα δεν αλλάζει και για το ισομορφισμό χρησιμοποιήσαμε το δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών $MN/N \approx M/(M \cap N)$).

Ας αποδείξουμε την $AC/BC \approx A/B(A \cap C)$.

Έχουμε $A/B(A \cap C) = \mathrm{A}/\mathrm{A} \cap (BC) \approx A(BC)/BC = AC/BC$.

(η πρώτη ισότητα απορρέει από το προηγούμενο λήμμμα και ο ισομορφισμός από το δεύτερο θεώρημα των ισομορφισμών.)

□

Πρόταση 0.1.5. *Έστω $C_1 \lhd A_1 \leq G$ και $C_2 \lhd A_2 \leq G$. Τότε*

$(A_1 \cap C_2)C_1 \lhd (A_1 \cap A_2)C_1$,

$(A_2 \cap C_1)C_2 \lhd (A_2 \cap A_1)C_2$ *και*

$(A_1 \cap A_2)C_1/(A_1 \cap C_2)C_1 \approx (A_2 \cap A_1)C_2/(A_2 \cap C_1)C_2$.

Απόδειξη. Οι κανονικότητες είναι προφανείς.

Θα δείξουμε τον ισομορφισμό.

Θέτουμε $B = (A_1 \cap C_2)(A_2 \cap C_1)$, τότε $(A_1 \cap C_2)C_1 = BC_1$ (γιατί;;;) μα αφού $A_2 \cap C_1 \leq C_1$.

Ομοίως $(A_2 \cap C_1)C_2 = BC_2$. Επομένως ο προς απόδειξη ισομορφισμός

$(A_1 \cap A_2)C_1/(A_1 \cap C_2)C_1 \approx (A_2 \cap A_1)C_2/(A_2 \cap C_1)C_2$ γίνεται

$(A_1 \cap A_2)C_1/BC_1 \approx (A_2 \cap A_1)C_2/BC_2$.

Τώρα το πρώτο μέλος της προς απόδειξη σχέσης (βάσει του προηγουμένου λήμμματος γίνεται)

$(A_1 \cap A_2)C_1/BC_1 \approx (A_1 \cap A_2)/B(A_1 \cap A_2 \cap C_1) = (A_1 \cap A_2)/B$.

Ομοίως το δεύτερο μέλος της προς απόδειξη σχέσης (βάσει του προηγουμένου λήμμματος γίνεται)

$(A_2 \cap A_1)C_2/BC_2 \approx (A_2 \cap A_1)/B(A_2 \cap A_1 \cap C_2) = (A_2 \cap A_1)/B$. .....και τέλος.

□

Τώρα είμαστε στη θέση να αποδείξουμε ένα από τα βασικότερα θεωρήματα στη Θεωρία Ομάδων.

Θεώρημα 0.1.6. *Έστω δύο σειρές*

$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$ *και*

$H = K_0 \lhd K_1 \lhd K_2 \cdots \lhd K_{m-1} \lhd K_m = G$

με την ίδια "αρχή" καιτο ίδιο "τέλος".

Τότε υπάρχουν ισοδύναμες επιλεπτύνσεις τους.

Απόδειξη. Η ιδέα είναι απλή. Σε κάθε δύο διαδοχικούς όρους H_{i-1}, H_i θα παρεμβάλουμε $m-1$ το πλήθος όρους και σε κάθε δύο διαδοχικούς όρους K_{j-1}, K_j θα παρεμβάλουμε $n-1$ το πλήθος όρους, οπότε θα προκύψουν δύο επιλεπτύνσεις των αρχικών σειρών με το ίδιο μήκος nm. Πώς θα γίνει αυτή η παρεμβολή για να πετύχουμε ισόμορφα πηλίκα;

Για τους διαδοχικούς όρους H_{i-1}, H_i οι όροι που θα παρεμβληθούν ορίζονται ως εξής:

$H_{ij} = (H_i \cap K_j)H_{i-1}$ για $j = 1, 2, \ldots, m$

Για τους διαδοχικούς όρους K_{j-1}, K_j οι όροι που θα παρεμβληθούν ορίζονται ως εξής:

$K_{ji} = (K_j \cap H_i)K_{j-1}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$.

Πριν προχωρήσουμε ας παρατηρήσουμε ότι
$\mathrm{H}_{i0} = (H_i \cap K_0)H_{i-1} = H_{i-1}$,
$\mathrm{H}_{im} = (H_i \cap K_m)H_{i-1} = H_i$ και
$K_{j0} = (K_j \cap H_0)K_{j-1} = K_{j-1}$,
$\mathrm{K}_{jn} = (K_j \cap H_n)K_{j-1} = K_j$.
Άρα τελικά έχουμε τις σειρές
$H = H_0 = H_{10} \leq H_{11} \leq \cdots H_{1m} = H_1 = H_{20} \cdots \cdots H_{nm} = H_n = G$ και
$\mathrm{H} = \mathrm{K}_0 = \mathrm{K}_{10} \leq \mathrm{K}_{11} \leq \cdots \mathrm{K}_{1n} = K_1 = K_{20} \cdots \cdots K_{mn} = K_m = G$.

Τώρα έρχεται η στιγμή να εφαρμόσουμε την προηγούμενη πρόταση επιλέγοντας "αριστοτεχνικά" τις υποομάδες που θα παίξουν τον ρόλο των $C_1 \lhd A_1$ και $C_2 \lhd A_2$. Συγκεκριμένα θέτουμε $C_1 = H_{i-1}$, $A_1 = H_i$ και $C_2 = K_{j-1}$, $A_2 = K_j$.

Πιστή τώρα εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης μας δίνει ότι $H_{ij}/H_{i(j-1)} \approx K_{ji}/K_{(j-1)\,i}$.

Αυτή η διαδικασία γίνεται για όλες τις δυνατές επιλογές των ζευγών δεικτών i, j, όπου $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Οπότε τελειώσαμε!!

□

Μια σημαντική παρατήρηση.

Από τον τρόπο κατασκευής των δύο επιλεπτύνσεων βλέπουμε ότι υπάρχουν διαδοχικοί όροι, οι οποίοι ενδέχεται να είναι ίσοι, οπότε το αντίστοιχο πηλίκο είναι τετριμμένο, αλλά τότε και το αντίστοιχο πηλίκο (στην άλλη σειρά) είναι τετριμμένο.

Για παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι $H_{ij} = (H_i \cap K_j)H_{i-1} = H_{i(j-1)} = (H_i \cap K_{j-1})H_{i-1}$, τότε όμως και $K_{ji} = (K_j \cap H_i)K_{j-1} = K_{(j-1)\,i} = (K_j \cap H_{i-1})K_{j-1}$ (γιατί;;;;).

Ας δούμε ένα πόρισμα.

Πόρισμα 0.1.7. *Υποθέτουμε ότι μια ομάδα G έχει μια συνθετική σειρά*
$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$, *τότε κάθε άλλη σειρά*
$H = K_0 \lhd K_1 \lhd K_2 \cdots \lhd K_{m-1} \lhd K_m = G$
υπάρει μια επιλέπτυνση, η οποία είναι και αυτή συνθετική.
Ειδικότερα, δύο συνθετικές σειρές μιας ομάδας είναι πάντα ισομορφικές.

Απόδειξη. Προφανής.

□

Εφαρμογή: Το θεμελιώδες Θεώρημα της αριθμητικής.

Ένα άλλο παράδειγμα.

Έστω S_n η ομάδα μεταθέσεων, $n \geq 5$. Δείξτε οτι δεν υπάρχουν υποκανονικές υοομάδες της S_n, εκτός της A_n.

Σε μια πεπερασμένη p- ομάδα κάθε υποομάδα είναι υποκανονική.

Επιλύσιμες σειρές-Η παράγωγος σειρά.

Πριν ξεκινήσουμε, ας διευκρινίσουμε κάτι.

Μέχρι τώρα, όταν είχαμε μια ομάδα G και Η μια υποομάδα της, ενδιαφερόμασταν για το πώς "προσεγγιζουμε" την G μέσω μιας (υπο)κανονικής σειράς
$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$, μελετώντας τα πηλίκα H_i/H_{i+1}.

Όταν, όμως, έχουμε μια ομάδα G και θέλουμε να την μελετήσουμε μέσω υποκανονικών σειρών της, τότε, επειδή δεν έχουμε συγκεκριμένη υποομάδα, ξεκινάμε από την ομάδα G πέρνουμε μια κανονική της υποομάδα G_1 και κατασκευάζουμε τους όρους $G = G_0 \rhd G_1$ Κατόπιν επιλέγουμε μια κανονική υποομάδα της G_1, έστω G_2, και συμπληρώνουμε $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2$ και συνεχίζουμε. ......

Οπότε, πρώτη παρατήρηση είναι ότι τώρα οι δείκτες "αυξάνονται" ενώ οι υποομάδες "μικραίνουν". Αυτό είναι το "τυπικό".

Η δεύτερη παρατήρηση είναι πιο ουσιαστική. Ξεκινώντας να επιλέγουμε τις υποομάδες G_i (τυχαία) θα φθάσουμε (σε πεπερασμένα βήματα) στην τετριμμένη ομάδα;

Μια τρίτη παρατήρηση είναι ακόμη πιο ουσιαστική. Κατασκευάζοντας μια τέτοια σειρά, η οποία έστω ότι, τερματίζει στην τετριμμένη ομάδα, τι πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε για τις ιδιότητες της ομάδας G;

Άρα, απαιτούμε να μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μιας σειράς

$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = 1$, όπου τα πηλίκα G_i/G_{i+1} να έχουν ορισμένες ιδιότηττες.

Ορισμός 0.1.8. *Μια σειρά $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n \triangleright \cdots$, η οποία δεν τερματίζει κατ' ανάγκη, αλλά όλα τα πηλίκα G_i/G_{i+1} είναι αβελιανές ομάδες θα ονομάζεται* **επιλύσιμη** *σειρά.*

Στην περίπτωση, όπου μια επιλύσιμος σειρά τερματίζει στην τετριμένη ομάδα, η ομάδα θα ονομάζεται επιλύσιμη.

Προφανώς οι αβελιανές ομάδες είναι επιλύσιμες.

Επίσης, οι διεδρικές ομάδες D_{2n} είναι προφανώς επιλύσιμες (γιατί;;)

Μια πεπερασμένη p-ομάδα είναι επίσης επιλύσιμη (γιατί;;).

Αλλά υπάρχουν και ομάδες οι οποίες δεν είναι επιλύσιμες. Γνωρίζουμε κάποια(ες);;;

Το σημαντικό στην ιδιότητα της επιλυσιμότητας ομάδων είναι ότι "κληρονομείται" στις υποομάδες και τα πηλίκα και "διατηρείται" στις επεκτάσεις.

Θεώρημα 0.1.9. *Έστω G ομάδα. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(i) Η ομάδα G είναι επιλύσιμη.

(ii) Κάθε υποομάδα της και κάθε πηλίκο της είναι επιλύσιμες ομάδες.

Απόδειξη. $(i) \implies (ii)$

Έστω η επιλύσιμη σειρά

$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = 1$.

και $H \leq G$. Ορίζουμε ως $H_i = H \cap G_i$. τότε ορίζεται η σειρά.

$H = H_0 \triangleright H_1 \triangleright H_2 \triangleright \cdots \triangleright H_{n-1} \triangleright H_n = 1$.

Προφανώς $H_{i+1} \triangleleft H_i$ (γιατί;;)

Επίσης $H_i/H_{i+1} = (H \cap G_i)/(H \cap G_{i+1}) = (H \cap G_i)/(H \cap G_{i+1}) \cap G_i \approx (H \cap G_i)G_{i+1}/G_{i+1} \leq G_i/G_{i+1}$. Άρα τα πηλίκα είναι αβελιανά, δηλαδή η Η είναι επιλύσιμη.

Γιατί ισχύει η τελευταία ισότητα; Γιατί ισχύει η $\approx$;;

Έστω τώρα $N \triangleleft G$. Από την προηγούμενη σειρά ορίζεται η σειρά

$G/N = G_0N/N \triangleright G_1N/N \triangleright G_2N/N \triangleright \cdots \triangleright G_{n-1}N/N \triangleright G_nN/N = 1$.

Γιατί στην τελευταία σειρά ισχύει η κανονικότητα διαδοχικών όρων;;;

Θα δείξουμε ότι τα πηλίκα $(G_{i-1}N/N)/(G_iN/N) \approx (G_{i-1}N)/(G_iN)$ είναι αβελιανά. πράγματι, $G_{i-1}N/G_iN = G_{i-1}(G_iN)/G_iN \approx G_{i-1}/G_{i-1} \cap G_iN \approx$ $(G_{i-1}/G_{i-1})/(G_{i-1} \cap G_iN)/G_{i-1})$,

ο τελευταίος όρος είναι πηλίκο αβελιανής ομάδας άρα βελιανή ομάδα και ...τέλος.

$(ii) \impliedby (i)$

Έστω $N \triangleleft G$ και $N = N_0 \triangleright N_1 \triangleright \cdot N_{k-1} \triangleright N_k = 1$ και $G/N = M_0/N \triangleright M_1/N \triangleright \cdots \triangleright M_{m-1}/N \triangleright M_m/N = 1$ δύο επιλύσιμες σειρές. Τότε η σειρά $G = M_0 \triangleright M_1 \cdots \triangleright M_{m-1} = N = N_0 \triangleright N_1 \triangleright \cdots N_{k-1} \triangleright N_k = 1$ (προσοχή στη "συγκόληση") είναι επιλύσιμη και ....τέλος. □

Το πρόβλημα που προκύπτει, με τον ορισμό που δώσαμε, είναι ότι όταν έχουμε μια ομάδα G, πώς θα βρούμε μια (γνήσια) κανονική υποομάδα της Μ ώστε το πηλίκο G/M να είναι αβελιανή ομάδα και να μπορέσουμε να ξεκινήσουμε την αναζήτηση, αν τελικά η G είναι επιλύσιμη;

Θα δούμε ότι (σχεδόν) πάντα μπορούμε να βρούμε μια κανονική υποομάδα M, ώστε το πηλίκο G/M να είναι αβελιανό.

Ας κάνουμε την "ανάλυση του προβλήματος".

Έστω G μια ομάδα και $a, b \in G$, τότε έχουμε $ab = ba(a^{-1}b^{-1}ab)$. Επομένως τα a, b μετατίθενται αν και μόνο αν $a^{-1}b^{-1}ab = 1$. Με διαφορετική έκφραση το στοιχείο $[\,a,\, b\,] = a^{-1}b^{-1}ab$ υποδηλώνει κατά πόσο "απέχουν" τα δύο στοιχεία από του να μετατίθενται. Το στοιχείο $[\,a,\, b\,] = a^{-1}b^{-1}ab$ θα ονομάζεται **μεταθέτης** των a, b.

Έστω τώρα το σύνολο $\{\,[a, b] \mid a, b \in G\,\}$ όλων των μεταθετών. Το πρώτο ερώτημα που προκύπτει είναι αν το σύνολο αυτό αποτελεί ομάδα.

Η απάντηση είναι όχι, διότι το γινόμενο δύο μεταθετών **δεν** είναι πάντα μεταθέτης. Ενώ το αντίστροφο ενός μεταθέτη $[a, b]^{-1} = \cdots [b, a]$.

Παρατήρηση 0.1.10. *Έστω A, B δύο (μη κενά) υποσύνολα της ομάδας G, τότε ορίζουμε ως $[A, B] = \langle\, [a, b] \mid a \in A,\, b \in B\,\rangle$ την υποομάδα της G την παραγώμενη από όλους τους μεταθέτες, όπου στην πρώτη θέση έχουν στοιχείο του συνόλου A και στην δεύτερη θέση στοιχείο του συνόλου B.*

Προφανώς, $A \subseteq C,\ B \subseteq D \implies [A, B] \subseteq [C, D]$.

Έστω $G' = \langle \{\,[a, b] \mid a, b \in G\}\rangle$ η υποομάδα της G η παραγώμενη από όλους τους μεταθέτες, Η υποομάδα αυτή θα ονομαζέται **παράγωγος** (υπο)ομάδα της G και, εκτός του συμβολισμού G', θα χρησιμοποιούμε και τους συμβολισμούς: $[G, G]$, $G^{(1)}$, $\gamma_2(G)$.

Η παράγωγος υποομάδα θα "διαδραματίσει" στο εξής σημαντικό ρόλο.

Κατ' αρχάς είναι κανονική υποομάδα της G (γιατί;;;). Αρκεί να υπολογίσουμε το συζυγές $g[a, b]g^{-1} = \cdots$ ενός μεταθέτη.

Η σημαντική παρατήρηση είναι ότι προφανώς η ομάδα G είναι αβελιανή αν και μόνο αν η παράγωγος υποομάδα G' είναι τετριμένη.

Επομένως, τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην "σύνθεση του προβλήματος".

Πρόταση 0.1.11. *Έστω G ομάδα και $H \leq G$.*

Τα ακολουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Η H είναι κανονική υποομάδα και η G/H είναι αβελιανή ομάδα.

(ii) $G' \leq H$.

Απόδειξη. $(i) \implies (ii)$

Έστω $a, b \in G$, επειδή η G/H έχει υποτεθεί αβελιανή έχουμε ότι $aH \cdot bH = bH \cdot aH$, δηλαδή $(aH)^{-1} \cdot (bH)^{-1} \cdot aH \cdot bH = H$, οπότε έχουμε $[a, b] \in H$, ...Άρα $G' \leq H$.

$(ii) \implies (i)$

Έστω $g \in G$, τότε για κάθε $h \in H$ έχουμε ότι $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh \in G' \leq H$, δηλαδή $g^{-1}hg \in H$. Άρα η H είναι κανονική υποομάδα της G.

Προφανώς από την σχέση $[a, b] \in G' \leq H$ έπεται ότι $aH \cdot bH = bH \cdot aH$ για κάθε $a, b \in G$. $\square$

Η πρόταση αυτή είναι σημαντική, διότι αποδεικνύει ότι η παράγωγος υποομάδα G' μιας ομάδας G είναι η μικρότερη, ως προς το περιέχεσθαι, με την ιδιότητα το πηλίκο G/G' να είναι αβελιανή ομάδα. Δυϊκά το πηλίκο G/G' είναι το μεγαλύτερο από τα αβελιανά πηλίκα της, υπό την έννοια ότι, κάθε άλλο αβελιανό πηλικο της G είναι πηλίκο του G/G'.

Όπως ορίσαμε την παράγωγο ομάδα $[G, G]$ μιας ομάδας G έτσι μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο ομάδα $[[G, G], [G, G]]$ της παραγώγου ομάδας $[G, G]$. Η διαδικασία αυτή μπορείνα συνεχιστεί αναδρομικά, οπότε, με απλούστευση του συμβολισμού, ορίζουμε $G = G^{(0)}$, $G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}]$, ... $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$, ...

Οι υποομάδες που ορίσαμε με αυτό τον τρόπο αποτελούν τους όρους της **παραγώγου** σειράς της G. Δηλαδή έχουμε την σειρά

$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}] \geq G^{(2)} \geq \cdots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \cdots$.

Από τον τρόπο ορισμού της παραγώγου σειράς έχουμε ότι κάθε πηλίκο $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ είναι αβελιανή ομάδα.

Θεώρημα 0.1.12. *Έστω G μια ομάδα, $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_{i-1} \rhd G_i \rhd \cdots$ μια επιλύσιμη σειρά και $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}] \geq G^{(2)} \geq \cdots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \cdots$ η παράγωγος σειρά της G. Τότε ισχύει ότι $G_i \geq G^{(i)}$ για κάθε i.*

Απόδειξη. Προφανώς από την Πρόταση 0.1.11 έχουμε ότι $G_1 \geq G^{(1)}$. Υποθέτουμε ότι $G_i \geq G^{(i)}$, τότε έχουμε. Η G_i/G_{i+1} είναι αβελιανή, από την υπόθεση, άρα πάλι από την 0.1.11, έχουμε ότι $[G_i, G_i] \leq G_{i+1}$. έχουμε υποθέσει όμως ότι $G_i \geq G^{(i)}$, άρα από την Παρατήρηση έχουμε ότι $G^{i+1} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \leq [G_i, G_i] \leq G_{i+1}$.

□

Πόρισμα 0.1.13. *Μια ομάδα G είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η παράγωγος σειρά τερματίζει σε πεπερασμένα βήματα, δηλαδή $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}] \geq G^{(2)} \geq \cdots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \cdots G^{(n)} = 1$.*

Μάλιστα δέ το n είναι ο μικρότερος "εκθέτης" με την ισιότητα αυτή και θα ονομάζεται **κλάση επιλυσιμότητας**, *ή* **παράγωγο μήκος** *της G.*

Οι όροι της παραγώγου σειράς μιας ομάδας G δεν είναι απλώς ο ένας κανονική υποομάδα του προηγουμένου ($G^{(i+1)} \lhd G^{(i)}$), αλλά ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο.

Πρόταση 0.1.14. *Κάθε όρος $G^{(i)}$ της παραγώγου δειράς μιας ομάδας G είναι πλήρως αναλλοιωτη υποομάδα.*

Απόδειξη. Υπεθυμίζουμε τι σημαίνει πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα.

Έστω G ομάδα και M μια υποομάδα της. Η M θα ονομάζεται πλήρως αναλλοίωτη, αν για κάθε ϑ ενδομορφισμό της G έπεται ότι $\vartheta(M) \leq M$.

Έστω $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ ένας μεταθέτης και ϑ ένας ενδομορφισμός της G, τότε $\vartheta([a, b]) = [\vartheta(a), \vartheta(b)]$. Αυτό είναι αρκετό για την απόδειξη του ισχυρισμού.

□

Επομένως ως πόρισμα έχουμε ότι κάθε όρος της παραγώγου σειράς είναι χαρακτηριστική υποομάδα της G.

Όπως είπαμε όλα αυτά γίνονται για να μελετήσουμε μια΄ομάδα με την βοήθεια υποομάδων και πηλίκων της.

Αντί ασκήσεως, ας δούμε την επομένη πρόταση.

Πρόταση 0.1.15. *Έστω Gομάδα και H, K κανονικές υποομάδες της. Υποθέτουμε ότι τα πηλίκα G/H και G/K είναι επιλύσιμες ομάδες. Τότε το πηλίκο $G/(H \cap K)$ είναι επιλύσιμη ομάδα.*

Απόδειξη. 1^η Απόδειξη.

Έστω $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}] \geq G^{(2)} \geq \cdots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \cdots$ η παράγωγος σειρά της G, τότε $[G/H, G/H] = ([G, G]H)/H$, (γιατί;;). Συνεπώς η G/H είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν $G^{(n)} \leq H$ για κάποιο n. Ομοίως η G/K είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν $G^{(m)} \leq K$ για κάποιο m. Συνεπώς, βάσει της υποθέσεως, έχουμε ότι $G^{(s)} \leq H \cap K$ για $s = max(n, m,)$.....

2^η Απόδειξη.

Ως γνωστόν (;;) η ομάδα $G/(H \cap K)$ εμφυτεύται στο ευθύ γινόμενο $G/H \times G/K$.

Όμως το ευθύ γινόμενο επιλυσίμων ομάδων είναι επιλύσιμο (γιατί;;;). Επομένως έπεται το αποτέλεσμα.

3^η Απόδειξη.

Από το δεύτερο Θεώρημα των ισομορφισμών έχουμε ότι η $H/(H \cap K) \approx HK/K \leq G/K$ είναι αβελιανή. Αλλά $(G/(H \cap K))/(H/(H \cap K)) \approx G/H$ και το αποτέλεσμα έπεται από την Πρόταση 0.1.11.

Επίτηδες είδαμε τρεις αποδείξεις. Στην πραγματικότητα μια είναι η απόδειξη και στηρίζεται στην Πρόταση 0.1.11.

□

Ενδιαφέρον αποκτά η προηγούμενη πρόταση στην περίπτωση όπου η τομή $H \cap K$ είναι τετριμένη, οπότε η ομάδα G είναι επιλύσιμη.

Πρόταση 0.1.16. *Μια πεπερασμένη ομάδα είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν έχει μια συνθετική σειρά με όρους κυκλικές ομάδες με τάξη πρώτο αριθμό.*

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα στηρίζεται στην εξής σημαντική παρατήρηση.

Κάθε επιλέπτυνση μιας επιλύσιμης σειράς είναι επιλύσιμη σειρά.

Πράγματι, αν G_i, G_{i+1} είναι διαδοχικοί όροι μιας επιλύσιμης σειράς, και παρεμβάλουμε την ομάδα $G_i > K > G_{i+1}$, τότε τα πηλίκα G_i/K και K/G_{i+1} είναι αβελιανά (γιατί;;).

□

Ένα πρόβλημα που ίσως έχετε ήδη εντοπίσει είναι το εξής:

Αν έχουμε την παράγωγο σειρά $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}] \geq G^{(2)} \geq \cdots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \cdots$ μιας ομάδας G, ποία είναι τα "αίτια" και ορισμένες φορές η σειρά δεν τερματίζει;

Ένα αίτιο είναι σε κάποιο στάδιο να έχουμε $G^{(i)} = G^{(i+1)} \neq 1$, οπότε από εκεί και πέρα έχουμε σταθερή την σειρά. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε ομάδες, όπου η παράγωγος υποομάδα τους ισούται με όλη την ομάδα. Γνωρίζουμε τέτοιες ομάδες; Μα φυσικά τις απλές (μη αβελιανές) ομάδες.

Ένα άλλο αίτιο είναι να έχουμε για όλα τα i $G^{(i)} > G^{(i+1)}$, αλλά η σειρά να μην τερματίζει ποτέ. Γνωρίζουμε τέτοια παραδείγματα;

Θα δούμε ότι οι ελεύθερες (μη αβελιανές) ομάδες έχουν την ιδιότητα αυτή.

Για να το δούμε αυτό κάνουμε ένα πρωθύστερο.

Θεωρούμε το εξής "Δόγμα" : *Κάθε υποομάδα ελεύθερης είναι ελεύθερη.*

Επομένως αν $F = F^{(0)} \triangleright F^{(1)} \triangleright \cdots F^{(i)} \triangleright F^{(i+1)} \triangleright \cdots$ είναι παράγωγος σειρά της ελεύθερης ομάδας F, τότε κάθε όρος είναι ελεύθερη ομάδα και γνήσια υποομάδα στον προηγούμενο όρο (γιατί;;). Μα αφού αν έχουμε μια ελεύθερη ομάδα επί ενός συνολου X, τότε σε κάθε μεταθέτη $[\, u(x_i, v(x_i)]$, προφανώς (;;) το άθροισμα των εκθετών κάθε γεννήτορα είναι ίσον με μηδέν. Άρα οι γεννήτορες x_i **δεν** ανήκουν στην παράγωγο υποομάδα.

Θα μπορούσαμε να παρακάμψουμε το προηγούμενο δόγμα και να αποδείξουμε ότι μια ελεύθερη ομάδα δεν είναι επιλύσιμη με αμεσότερο τρόπο.

Πράγματι, υποθέτουμε ότι η παράγωγος σειρά τερματίζει $F = F^{(0)} \triangleright F^{(1)} \triangleright \cdots F^{(i)} \triangleright F^{(i+1)} \triangleright F^{(n)} \triangleright F^{(n+1)} = 1$. Τι σημαίνει αυτό; Ότι η $F^{(n)}$ είναι αβελιανή. Τι έχουμε δει (Άσκηση 2 Ομάδα D); Οι μόνες αβελιανές ομάδες μιας ελεύθερης ομάδας είναι οι κυκλικές. Άρα έχουμε μια κανονική κυκλική υποομάδα μιας ελεύθερης ομάδας, δηλαδή $F^{(n)} = \langle w \rangle$. Τι σημαίνει αυτό; Ότι g^2 μετατίθεται με το w για κάθε $g \in F$, άτοπο.

Κεντρικές σειρές- Μηδενοδύναμες ομάδες

Αν έχουμε μια (υπο)κανονική σειρά $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{i-1} \triangleright G_i \triangleright \cdots$ μιας ομάδας G, είδαμε ότι για να μελετήσουμε την G απαιτούμε τα πηλίκα G_i/G_{i+1} να πληρούν κάποιες ιδιότητες. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των επιλυσίμων ομάδων, απαιτούμε τα πηλίκα αυτά να είναι αβελιανές ομάδες.

Θα μπορούσαμε να θέσουμε πιο απαιτητικούς όρους.

Ορισμός 0.1.17. *Μια κανονική σειρά $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{i-1} \triangleright G_i \triangleright \cdots$ θα ονομάζεται **κεντρική** αν $G_i/G_{i+1} \leq Z(G/G_{i+1})$.*

Προσοχή! εδώ απαιτούμε κάθε όρος να είναι κανονική σε όλη την ομάδα G και όχι μόνο στον αμέσως προηγούμενο.

Προφανώς κάθε κεντρική σειρά είναι επιλύσιμη. Προσοχή! το αντίστροφο δεν ισύχει.

Για παράδειγμα, η σειρά $S_3 \triangleright A_3 \triangleright 1$ είναι επιλύσιμη, αλλά όχι κεντρική.

Πρόταση 0.1.18. *Η σειρά* $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{i-1} \triangleright G_i \triangleright \cdots$ *είναι κεντρική αν και μόνο αν* $[G, G_{i-1}] \leq G_i$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η σειρά είναι κεντρική. Τότε $G_{i-1}/G_i \leq Z(G/G_i)$.

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $g \in G$ και κάθε $h \in G_{i-1}$ έχουμε ότι

$[gG_i, hG_i] = 1G_i$, δηλαδή $[g, h] \in G_i$.

Αντίστροφα, υποθέτομε ότι $[G, G_{i-1}] \leq G_i$ για κάθε i, τότε η G_1 είναι κανονική στην G. Έστω $g \in G$ και $h \in G_i \leq G_{i-1}$, τότε το $g^{-1}h^{-1}g = g^{-1}h^{-1}ghh^{-1} = [g, h]h^{-1} \in G_i$, δεδομένου ότι από την υπόθεση έχουμε $[g, h] \in G_1$. Δηλαδή η G_i είναι κανονική στην ομάδα G.

Επίσης, από την σχέση $[G, G_{i-1}] \leq G_i$ έχουμε ότι για κάθε $gG_i \in G/G_i$ και κάθε $hG_i \in G_{i-1}/G_i$ έπεται ότι $[gG_i, hG_i] \in G_i/G_i$. Αυτό σημαίνει ότι $hG_i \in Z(G/G_i)$ και τέλος.

□

Η προηγούμενη πρόταση αποτελεί ένα ισοδύναμο ορισμό της κεντρικής σειράς.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής:

Αν έχουμε μια (τυχαία) ομάδα G, μπορούμε να βρούμε (τουλάχιστον) μια κεντρική σειρά της;

Θα "κινηθούμε" όπως στην περίπτωση των επιλυσίμων σειρών.

Ορίζουμε $G = \gamma_1(G)$, $\gamma_2(G) = [G, G] = [G, \gamma_1(G)]$ και αναδρομικά $\gamma_{i+1}(G) = [G, \gamma_i(G)]$.

Προφανώς για κάθε i έχουμε ότι $\gamma_i \geq \gamma_{i+1}$ και κάθε $\gamma_i(G)$ είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της G (Παράβαλε με την Πρόταση 0.1.14).

Πρόταση 0.1.19. *Έστω G ομάδα, τότε ισχύει ότι* $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G) \leq Z(G/\gamma_{i+1}(G))$.

Απόδειξη. Από τον τρόπο ορισμού των $\gamma_i(G)$, έχουμε $[G, \gamma_i(G)] = \gamma_{i+1}(G)$.

Το αποτέλεσμα έπεται από την Πρόταση 0.1.18 .

□

Η πρόταση αυτή αποδεικνύει ότι η σειρά

$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_i(G) \cdots$ είναι μια κεντρική σειρά της G. Άρα απαντήσαμε στο ερώτημα:

Σε μια ομάδα πάντα ορίζεται μια κεντρική σειρά.

Πρόταση 0.1.20. *Έστω G ομάδα και* $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{i-1} \triangleright G_i \triangleright \cdots$ *μια (τυχαία) κεντρική σειρά και*

$G = \gamma_1(G) \triangleright \gamma_2(G) \triangleright \cdots \triangleright \gamma_i(G) \cdots$

η κεντρική σειρά που ορίσαμε προηγουμένως. Τότε ισχύει ότι $G_i \geq \gamma_{i+1}(G)$ *για κάθε* $i = 0, 1, \ldots$.

Απόδειξη. Επειδή έχουμε κεντρική σειρά από την Πρόταση 0.1.18 έχουμε ότι $[G, G_i] \leq (G_{i+1}$. Οπότε με επαγωγή έχουμε ότι $\gamma_{i+1}(G) = [G, \gamma_i(G)] \leq [G, G_{i-1} \leq {}_i$.

(Δεν ξεχνάμε ότι εξ ορισμού $\gamma_1(G) = G = G_0$, για να είμαστε και τυπικά εντάξει ως προς την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής).

□

Η προηγούμενη Πρόταση μας "επιτρέπει" την σειρά

$G = \gamma_1(G) \triangleright \gamma_2(G) \triangleright \cdots \triangleright \gamma_i(G) \cdots$

να την ονομάσουμε **κατώτερη κεντρική σειρά** της G.

Επίσης, ας συγκρίνουμε την προηγούμενη πρόταση με το αντίστοιχο Θεώρημα 0.1.12, όπου συγκρίνεται μια επιλύσιμη σειρά με την παράγωγο σειρά.

Το ερώτημα που προκύπτει, όπως στις επιλύσιμες σειρές, κατά πόσο μια κεντρική σειρά

$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{i-1} \triangleright G_i \triangleright \cdots$

σειρά μιας ομάδας τερματίζει στην τερτιμένη ομάδα σε πεπερασμένα βήματα.

Ορισμός 0.1.21. *Μια ομάδα G για την οποία υπάρχει (τουλάχιστον) μια κεντρική σειρά $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{i-1} \triangleright G_i \triangleright \cdots$ ώστε $G_n = 1$ για κάποιο n θα ονομάζεται* **μηδενοδύναμη** *ομάδα.*

Προφανώς οι αβελιανές ομάδες είναι μηδενοδύναμες.

Επίσης, επειδή κάθε κεντρική σειρά είναι και επιλύσιμη σειρά, κάθε μηδενοδύναμη ομάδα είναι επιλύσιμη.

Το αντίστροφο, προφανώς (;;), δεν ισχύει.

Λήμμα 0.1.22. *Έστω G ομάδα και $G = \gamma_1(G) \triangleright \gamma_2(G) \triangleright \cdots \triangleright \gamma_i(G) \cdots$ η κατώτερη κεντρική σειρά της, τότε για κάθε υποομάδα* Η *και κάθε πηλίκο $G/$*N *ισχύει ότι:*

$\gamma_i(H) \subseteq H \cap \gamma_i(G)$ και $\gamma_i(G/N) = \gamma_i(G)N/N$, για κάθε i.

Απόδειξη. Το ότι $\gamma_i(H) \subseteq H \cap \gamma_i(G)$ είναι προφανές.

Προφανώς ισχύει $\gamma_1(G/N) = \gamma_1(G)N/N$. Υποθέτουμε τώρα ότι $\gamma_i(G/N) = \gamma_i(G)N/N$.

Έστω $[gN, rN] \in \gamma_{i+1}(G/N) = [G/H, \gamma_i(G/N)]$ με $rN \in \gamma_i(G/N) =$ (από την επαγωγική υπόθεση $) = \gamma_i(G)N/N$. Δηλαδή το r μπορεί να υποτεθεί ότι είναι στοιχείο της $\gamma_i(G)$, οπότε $[gN, rN] = [g, r]N \in [G, \gamma_i(G)]N/N = \gamma_i(G)N/N$. Άρα $\gamma_{i+1}(G/N) \subseteq \gamma_{i+1}(G)N/N$.

Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι(;;) προφανής και τελικά $\gamma_i(G/N) = \gamma_i(G)N/N$, για κάθε i.

□

Θεώρημα 0.1.23. *Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα, τότε κάθε υποομάδα H και κάθε πηλίκο G/N είναι μηδενοδύναμη ομάδα.*

Απόδειξη. Επειδή η ομάδα G έχει υποτεθεί μηδενοδύναμη, η κατώτερη κεντρική σειρά είναι της μορφής:

$G = \gamma_1(G) \triangleright \gamma_2(G) \triangleright \cdots \triangleright \gamma_i(G) \cdots \gamma_n(G) \triangleright \gamma_{n+1}(G) = 1.$

Οπότε το αποτέλεσμα είναι άμεσο από το προηγούμενο λήμμα.

□

Παρατηρήσεις 0.1.24.
1. *Στο Θεώρημα 0.1.9 είχαμε δεί ότι στις επιλύσιμες ομάδες ισχύει και το αντίστροφο. Στην περίπτωση των μηδενοδυνάμων ομάδων δεν ισχύει. Για παράδειγμα στην ομάδα S_3 η υποομάδα $A_3 = \langle (12, 3) \rangle$ είνα μηδενοδύναμη, το πηλίκο S_3/A_3 είναι μηδενοδύναμο, αλλά η S_3 δεν είναι μηδενοδύναμη.*

2. *Όπως θα έχετε ήδη παρατηρήσει, σε μια (μη τετριμμένη) μηδενοδύναμη ομάδα G το κέντρο της $Z(G)$ δεν είναι τετριμμένο (γιατί;;). Μα αν έχουμε μια κεντρική σειρά με $G = G_0 \triangleright \cdots G_{n-1} \triangleright G_n = 1$, τότε $1 \neq G_{n-1} \leq Z(G)$.*

   Άρα αναγκαία συνθήκη για να είναι μια ομάδα μηδενοδύναμη είναι να έχει μη τετριμμένο κέντρο. Προφανώς η συνθήκη αυτή δεν είναι ικανή (μπορείτε να δόσετε ένα παράδειγμα ομάδας με μη τετριμμένο κέντρο, η οποία να μην είναι μηδενοδύναμη;;)

Ως γνωστόν (;;) οι (μη αβελιανές) ελεύθερες ομάδες έχουν τετριμμένο κέντρο (ιδέ άσκηση 4 της ομάδας Δ), συνεπώς οι ελεύθερες ομάδες δεν είναι μηδενοδύναμες.

Ισχύει ένα μερικό αντίστροφο του προηγουμένου θεωρήματος.

Θεώρημα 0.1.25. *Έστω G ομάδα και N υποομάδα της με την ιδιότητα $N \leq Z(G)$. Υποθέτουμε ότι η G/N είναι μηδενοδύναμη. Τότε η G είναι μηδενοδύναμη.*

Απόδειξη. Επειδη η G/N είναι μηδενοδύναμη έχουμε ότι $\gamma_{n+1}(G/N) = 1_{G/N} = \mathrm{N}/N = 1\mathrm{N}$ για κάποιο θετικό ακέραιο n.

Παρατηρούμε ότι $\gamma_{n+1}(G)N/N \subseteq \gamma_{n+1}(G/N)$ (γιατί;, στην πραγματικότητα έχουμε ισότητα , γιατί;;). Επομένως (από την υπόθεση) $\gamma_{n+1}(G)N/N = 1\mathrm{N}$, δηλαδή $\gamma_{n+1}(G) \subseteq N \leq Z(G)$. Αυτό σημαίνει ότι $\gamma_{n+2} = [G, \gamma_{n+1}(G)] = 1$.

□

Μέχρι τώρα στις επιλύσιμες και κεντρικές σειρές ξεκινούσαμε από ομάδα G και αναδρομικά "καταβαίναμε" ξεκινώντας από την ομάδα G.

Ας ξεκινήσουμε αντίστροφα. Ορίζουμε $Z_0(G) = 1$ και αναδρομικά $Z_{i+1}(G)/Z_i = Z(G/Z_i)$. Παρατηρούμε ότι $Z_1(G) = Z(G)$, το κέντρο της ομάδας. Οπότε, αν το κέντρο της ομάδας είναι τετριμμένο, όλοι οι όροι που ορίζονται με τον τρόπο αυτό είναι τετριμμένοι και δεν έχει νόημα να προχωρήσουμε. Αν το κέντρο δεν είναι τετριμμένο προχωράμε και έχουμε μια κανονική σειρά

$1 = Z_0(G) \lhd Z_1(G) = Z(G) \lhd Z_2(G) \lhd \cdots \lhd Z_i(G) \lhd \cdots$.

Η σειρά αυτή, από τον τρόπο ορισμού της είναι μια κεντρική σειρά (παράβαλε με τον ορισμό 0.1.17). Οπότε γεννάται το ερώτημα υπάρχει περίπτωση σε πεπερασμένα βήματα να "φθάσουμε" στην ομάδα G;

Πρόταση 0.1.26. *Έστω G μια μηδενοδύναμη ομάδα και $G = G_0 \rhd \cdots G_{n-1} \rhd G_n = 1$ μια κεντρική της σειρά, τότε*

$Z_i(G) \geq G_{n-i}$ για κάθε κάθε $i = 0 1, \ldots n$.

Ειδικά για $i = n$ έχουμε ότι $Z_n(G) = G$.

Απόδειξη. Πριν ξεκινήσουμε να επισημάνουμε, για άλλη μια φορά, την άνοδο/κάθοδο των δεικτών στις δύο σειρές.

Προφανώς $Z_0(G) = 1 = G_n$. Επίσης, από τον (ισοδύναμο) ορισμό της κεντρικής σειράς στην Πρόταση 0.1.18, έχουμε ότι $\mathrm{Z}_1(G) = Z(G) \geq G_{n-1}$.

Υποθέτουμε ότι $Z_i \geq G_{n-i}$. Τότε έχουμε ότι υπάρχει επιμορφισμός

$\varphi : G/G_{n-i} \longrightarrow G/Z_i(G)$ (γιατί;;). Επομένως βάσει της ασκήσης $(*)$ (ιδέ στο τέλος) έχουμε ότι η $G_{n-(i+1)}/G_{n-i} \leq Z(G/G_{n-i})$ απεικονίζεται μέσα στο κέντρο της $G/Z_i(G)$, το οποίο, εξ ορισμού, ισούται με $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$. Αλλά η εικόνα της $G_{n-(i+1)}/G_{n-i}$ είναι η $G_{n-(i+1)}\mathrm{Z}_i(G)/Z_i(G)$ (γιατί;;). Αυτό σημαίνει ότι $G_{n-(i+1)}\mathrm{Z}_i(G) \leq Z_{i+1}(G)$, δηλαδή $G_{n-(i+1)} \leq Z_{i+1}(G)$ και τέλος.

□

$(*)$ Έστω $\varphi : M \longrightarrow N$ επιμορφισμός ομάδων, τότε $\varphi(Z(M)) \leq Z(N)$.

Η προηγούμενη πρόταση μας επιτρέπει να ονομάζουμε την σειρά

$1 = Z_0(G) \lhd Z_1(G) = Z(G) \lhd Z_2(G) \lhd \cdots \lhd Z_i \lhd \cdots$. **ανώτερη** κεντρική σειρά της G.

Πόρισμα 0.1.27. *Έστω G ομάδα. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

1. *Η G είναι μηδενοδύναμη.*

2. *Υπάρχει κεντρική σειρά της $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_{i-1} \rhd G_i \rhd \cdots$ ώστε $G_n = 1$ για κάποιο n.*

3. *Η κατώτερη κεντρική σειρά είναι της μορφής* $G = \gamma_1(G) \rhd \gamma_2(G) \rhd \cdots \rhd \gamma_i(G) \cdots \gamma_n(G) \rhd \gamma_{n+1}(G) = 1$.

4. *Η ανώτερη κεντρική σειρά είναι της μορφής* $1 = Z_0(G) \lhd Z_1(G) = Z(G) \lhd Z_2(G) \lhd \cdots \lhd Z_n = G$.

Επιπλέον ισχύει $Z_i G \geq G_{n-i} \geq \gamma_{n-i+1}$, *για κάθε κάθε* $i = 0 1, \dots n$.

Απόδειξη. Προφανής από τα προηγούμενα. □

Το κοινό n που εμφανίζεται στις ανωτέρω σειρές, ονομάζεται **κλάση μηδενοδυναμίας** της G.

Οι μηδενοδύναμες ομάδες έχουν "πολλές και καλές" ιδιότητες. Όλες πηγάζουν από την απαίτηση να υπάρχουν κεντρικές σειρές μεταξύ της ομάδας και της τετριμμένης υποομάδας, οπότε η ύπαρξη μη τετριμμένου και η δομή του καθορίζουν (σε μεγάλο βαθμό) την δομή της ομάδας.

Πρόταση 0.1.28. *Έστω* G *μηδενοδύναμη ομάδα και* H *μη τετριμμένη κανονική υποομάδα της. Τότε* $H \cap Z(G) \neq 1$.

Απόδειξη. Επειδή η G είναι μηδενοδύναμη, υπάρχει n έτσι ώστε $Z_n(G) = G$.

Υποθέτουμε ότι $H \cap Z_1(G) = 1$. Τότε $[\,H \cap Z_2(G), G] \leq Z_1(G) \cap H = 1$ (γιατί;). Από την τελευταία σχέση έχουμε $H \cap Z_2 \leq Z_1 \cap H = 1$.

Συνεχίζουμε αναδρομικά και έχουμε $[\,H \cap Z_3(G), G] \leq Z_2(G) \cap H = 1$. Δηλαδή $H \cap Z_3(G) \leq Z_1(G) \cap H = 1$. Επομένως αν $H \cap Z_i(G) = 1$ τοτε $[\,H \cap Z_{i+1}(G), G] \leq Z_i \cap H = 1$, δηλαδή $H\, capZ_{i+1}(G) \leq Z_1(G) \cap H = 1$. Άρα τελικά $H \cap Z_n(G) = 1$, άτοπο. □

Πρόταση 0.1.29. *Κάθε υποομάδα* H *μιας μηδενοδύναμης ομάδας* G *είναι υποκανονική.*

Απόδειξη. Έχουμε την ανώτερη κεντρική σειρά $1 = Z_0(G) \lhd Z_1(G) \lhd \cdots \lhd Z_{n-1}(G) \lhd Z_n(G) = G$.

Θέτουμε $H_i = HZ_i(G)$. Επομένως σχηματίζεται η σειρά

$\mathrm{H} = \mathrm{H}Z_0(G) \lhd \mathrm{H}Z_1(G) \lhd \cdots \lhd \mathrm{H}Z_{n-1}(G) \lhd \mathrm{H}Z_n(G) = G$ και τέλος (;;;). Δεν έχουμε τελειώσει, διότι δεν γνωρίζουμε αν οι διαδοχικοί όροι $HZ_i(G) \lhd HZ_{i+1}(G)$.

Τι κάνουμε, πέρνουμε τα πηλίκα $HZ_i(G)/Z_i(G)$ και $HZ_{i+1}(G)/Z_i(G)$ βλέπουμε ότι, επειδή $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$, ισχύει ότι $HZ_i(G)/Z_i(G) \lhd HZ_{i+1}(G)/Z_i(G)$ (κάντε το!). Απ'όπου φυσικά έπεται ότι $HZ_i(G) \lhd HZ_{i+1}(G)$. □

Είχαμε δεί ότι στις πεπερασμένες p-ομάδες το ίδιο αποτέλεσμα με διαφορετική προσέγγιση.

Είχαμε αποδείξει την εξής πρόταση:

Σε μια πεπερασμένη p*-ομάδα* G *κάθε υποομάδα της* H *πληροί την συνθήκη της κανονικοποιούσας της* ($H < N_G(H)$)*.* Απ' όπου φυσικάέπεται ότι κάθε υποομάα της είναι υποκανονική.

Η προηγούμενη πρόταση στην πραγματικότητα αποδεικνύει ότι σε μια μηδενοδύναμη ομάδα κάθε υποομάδα πληροί την συνθήκη της κανονικοποιούσας. Δεδομένου ότι από την σχέση $H \lhd HZ_1$ έπεται ότι $HZ_1 \leq \mathrm{N}_G(H)$ και αν μεν $HZ_1(G) \neq H$ έχει καλώς, διαφορετικά έχουμε $\mathrm{H} \lhd \mathrm{HZ}_2(G)$ και συνεχίζουμε.

Όπως διαισθανόμαστε υπάρχει στενή σχέση μεταξύ των πεπερασμένων p-ομάδων και των μηδενοδυνάμων ομάδων.

Πριν μελετήσουμε διεξοδικά την σχέση αυτή θα δούμε μερικές ιδιότητητες του κέντρου μιας μηδενοδύναμης ομάδας, οι οποίες έχουν "αντίκτυπο" σε όλη την ομάδα.

Πρόταση 0.1.30. *Έστω G ομάδα. Υποθετουμε ότι το κέντρο της είναι ελευθέρας στρέψεως, τότε κάθε όρος της ανώτερης κεντρικής σειράς είναι ελευθέρας στρέψεως.*

Συνεπώς μια μηδενοδύναμη ομάδα με κέντρο ελευθέρας στρέψεως είναι και αυτή ελευθέρας στρέψεως.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $Z(G)\, Z_1(G)$ δεν περιέχει στοιχεία πεπερασμένης τάξης και έστω $x \in Z_2(G)$ πεπερασμένης τάξης. Τότε για κάποιο θετικό ακέραιο m έχουμε $x^m = 1$. Επίσης, επειδή $x \in Z_2(G)$ έχουμε ότι για κάθε $g \in G$ έχουμε ότι $[g, x] \in Z_1(G)$. Αλλά από την σχέση $[g, x]^m = [g, x^m]$ (γιατί ισχύει αυτή η σχέση;;;;) έχουμε ότι $[g, x] = 1$, άρα $x \in Z(G)$, δηλαδή $x = 1$, αφού το κέντρο είναι ελευθέρας στρέψεως.

Αναδρομικά κάθε όρος της ανώτερης κεντρικής σειράς είναι ελευθέρας στρέψεως. □

Ισχύει κάτι πιο ισχυρό.

Πρόταση 0.1.31. *Έστω e ο εκθέτης του κέντρου μια μηδενοδύναμης ομάδας G. Τότε ο εκθέτης της G διαιρεί τον e^n, όπου n είναι η κλάση μηδενοδυναμίας της G.*

Απόδειξη. Έστω $x \in Z_2(G)$, τότε $[\,g, x\,] \in Z(G)$, οπότε $1 = [g, x]^e = [g, x^e]$, δηλαδή $x^e \in Z(G)$. Συνεπώς $(x^e)^e = x^{e^2} = 1$ και με αναδρομή έχουμε το αποτέλεσμα. □