

## 0.1 Σειρές.

### Ορισμοί.

Έστω  $G$  μια ομάδα και  $H$  μια κανονική υποομάδα της, τότε, ως γνωστόν, ορίζεται η ομάδα πηλίκο  $G/H$ . Ένα από τα προβλήματα/πρόκληση, που αντιμετωπίζουμε, είναι το πώς θα "αντλήσουμε" πληροφορίες για τις ιδιότητες της ομάδας  $G$  μελετώντας τις ομάδες  $H$  και  $G/H$ . Γενικότερα, πώς θα αντλήσουμε πληροφορίες για μια από τις ομάδες  $G$ ,  $H$ ,  $G/H$  μελετώντας τις άλλες δύο.

Όταν όμως έχουμε μια ομάδα  $G$  και μια υποομάδα της  $H$ , η οποία δεν είναι κανονική, τότε, επειδή το πηλίκο  $G/H$  δεν ορίζεται, αναζητούμε αν υπάρχει μια ακολουθία υποομάδων  $H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \cdots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$ , όπου με αυτόν τον τρόπο να προσεγγίζουμε την  $G$ .

Προσοχή! Κάθε  $H_{i-1}$  είναι κανονική στην επομένη της  $H_i$ , αλλά δεν είναι κατ'ανάγκη κανονική στην ομάδα  $G$ .

Αν υπάρχει μια τέτοια ακολουθία, τότε αυτή θα ονομάζεται **(υπο)κανονική σειρά** με αρχικό όρο την υποομάδα  $H$  και τελικό όρο την ομάδα  $G$ , οι ομάδες  $H_{i-1}/H_i$  τα πηλίκα της σειράς, το δε πλήθος  $n$  θα ονομάζεται το **μήκος** της σειράς.

Εξυπακούεται ότι οι όροι μια σειράς είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Μερικές φορές, για τεχνικούς λόγους, θα επιτρέπουμε να έχουμε δύο διαδοχικούς όρους ίσους.

Πριν ό,τιδήποτε άλλο να διευκρινίσουμε ότι στην περίπτωση όπου κάθε όρος της σειράς είναι κανονική υποομάδα στην ομάδα  $G$ , τότε έχουμε μια **κανονική** σειρά. (Πολλοί αναφέρουν όλες τις σειρές αυτού του είδους ως κανονικές σειρές. Εδώ θα το διευκρινίζουμε κάθε φορά, όταν υπάρχει κίνδυνος να προκληθεί σύγχυση.)

Μετά τους ορισμούς και τις διευκρινίσεις, ας δούμε μερικά ερωτήματα που εγείρονται.

1. Μεταξύ μιας υποομάδας  $H$  και της ομάδας  $G$  μπορούν υπάρξουν σειρές και πόσες;
2. Το μήκος δύο σειρών είναι πάντα σταθερό;

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Έστω  $G = \langle a \rangle$  η άπειρη κυκλική και  $H = \langle a^{pqr} \rangle$ , όπου  $p, q, r$  πρώτοι αριθμοί, τότε μπορούμε να βρούμε πολλές σειρές μεταξύ της  $H$  και της  $G$ . Ας δούμε μερικές εξ αυτών:

Προφανώς η  $H < G$  είναι μια κανονική σειρά. Αλλά βλέπουμε ότι η

$H < \langle a^p \rangle < G$  είναι μια άλλη σειρά, όπως και η

$H < \langle a^{pq} \rangle < \langle a^p \rangle < G$ . Όπως βλέπουμε κάθε μια από αυτές προέρχεται από την προηγούμενη παρεμβάλλοντας έναν ενδιάμεσο όρο. Αν όμως προσπαθήσουμε στην τελευταία σειρά να παρεμβάλουμε (γνήσιως) άλλους όρους, τότε αυτό δεν είναι δυνατόν (γιατί;).

Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις ας δώσουμε δύο ορισμούς:

Έστω  $H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \cdots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$  και

$H = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft K_2 \cdots \triangleleft K_{m-1} \triangleleft K_m = G$  δύο σειρές.

Η δεύτερη σειρά θα ονομάζεται (γνήσια) **επιλέπτυνση** της πρώτης, αν "προέρχεται" από την πρώτη δια της παρεμβολής κάποιων όρων. Αν θέλουμε να το εκφράσουμε τυπικά. Η δεύτερη είναι επιλέπτυνση της πρώτης αν υπάρχουν όροι  $K_{j_i}$  ούτως ώστε  $H_i = K_{j_i}$  (όπου οι δείκτες κινούνται αναλόγως). Όπου, οι όροι της δεύτερης σειράς είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και  $n < m$  (εξ ου το γνήσια). Στην τρίτη σειρά όμως στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι δεν μπορούμε να παρεμβάλουμε όρους ώστε να επιτύχουμε μια γνήσια επιλέπτυνση. Η περίπτωση αυτή υπακούει στον εξής ορισμό:

Μια σειρά θα ονομάζεται **συνθετική**, αν δεν επιδέχεται γνήσιες επιλεπτύνσεις.

### Συνθετικές, ισοδύναμες (ισόμορφες) σειρές

Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν έχουμε μια σειρά, κατά πόσο μπορούμε με (διαδοχικές) επιλεπτύνσεις να φθάσουμε σε μια συνθετική σειρά. Επίσης, πώς αναγνωρίζουμε αν μια σειρά είναι συνθετική.

Προφανώς, αν έχουμε την σειρά

$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \cdots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$  με την  $H$  πεπερασμένου δείκτη, τότε αυτή μπορεί να επιλεπτυνθεί σε μία συνθετική σειρά.

Ειδικότερα, κάθε σειρά μιας πεπερασμένης ομάδας μπορεί να επιλεπτυνθεί σε μια συνθετική σειρά.

Αν έχουμε όμως την άπειρη κυκλική ομάδα  $G = \langle a \rangle$ , τότε η σειρά  $1 \triangleleft G$  δεν μπορεί να επιλεπτυνθεί σε συνθετική σειρά (γιατί;)

**Πρόταση 0.1.1.** Η σειρά  $H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \cdots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$  είναι συνθετική αν και μόνο αν κάθε πηλίκο  $H_{i-1}/H_i$  είναι απλή ομάδα.

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι κάθε πηλίκο είναι απλή ομάδα, και ότι υπάρχουν δύο διαδοχικοί όροι  $H_{i-1}, H_i$ , όπου μπορούμε να παρεμβάλουμε γνήσιως την υποομάδα  $H_{i-1} \triangleleft K \triangleleft H_i$ , τότε στα αντίστοιχα πηλίκα έχουμε  $K/H_{i-1} \triangleleft H_i/H_{i-1}$  με τις ανισώσεις γνήσιες, άτοπο.

Όμοια για το αντίστροφο.

□

Όπως είδαμε, αν έχουμε δύο σειρές, τότε μπορούμε να τις "συγκρίνουμε" με το αν η μια είναι επιλέπτυνση της άλλης.

Μάλιστα δέ αυτό το μέτρο σύγκρισης προφανώς(;) ορίζει μια σχέση μερικής διάταξης στο σύνολο των σειρών (με την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος).

Το ερώτημα, το οποίο προκύπτει τώρα είναι το εξής: Αν έχουμε δύο σειρές ( με ίδια αρχή και τέλος ), θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα "άλλο μέτρο" σύγκρισης;

**Ορισμός 0.1.2.** Οι σειρές

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \cdots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G \text{ και}$$

$$H = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft K_2 \cdots \triangleleft K_{m-1} \triangleleft K_m = G$$

θα ονομάζονται **ισοδύναμες** αν υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των των πηλίκων της μιας σειράς και των πηλίκων της άλλης, όπου αντίστοιχα πηλίκα είναι ισόμορφα.

"Τυπολατρικά" οι δύο σειρές ονομάζονται **ισοδύναμες** αν  $n = m$  και υπάρχει μια μετάθεση  $\pi$  των δεικτών, ώστε  $H_{i-1}/H_i \approx K_{\pi(i)-1}/K_{\pi(i)}$ .

Προσοχή! Παρ' όλο που λέμε στον ορισμό υπάρχει μια μετάθεση δεικτών.... Πολλοί θεωρούν ότι αναγκαστικά  $H_{i-1}/H_i \approx K_{i-1}/K_i$  για όλα τα  $i$ .

Για παράδειγμα: Έστω  $G = \langle a \rangle$  η άπειρη κυκλική και οι σειρές

$H_0 = \langle a^{pq} \rangle < H_1 = \langle a^p \rangle < H_2 = \langle a \rangle$  και  $K_0 = \langle a^{pq} \rangle < K_1 = \langle a^q \rangle < K_2 = \langle a \rangle$ , όπου  $p, q$  πρώτοι αριθμοί, τότε  $H_1/H_0 \approx K_2/K_1$  και  $H_2/H_1 \approx K_1/K_0$ .

Μάλιστα δέ αυτό το μέτρο σύγκρισης προφανώς(;) ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των σειρών (με την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος).

Λόγω του ισομορφισμού μεταξύ των πηλίκων δύο ισοδυνάμων σειρών πολλές φορές αυτές τις σειρές θα τις αποκαλούμε και ισόμορφες.

Ένα άλλο πρόβλημα που προκύπτει είναι το εξής:

Όταν έχουμε μια σειρά, μπορούμε να "αναπτύξουμε μια μέθοδο" ώστε να επιτυγχάνουμε επιλεπτύνσεις της, ή κάθε φορά θα επιχειρούμε κατά το δοκούν;

Ας δούμε μερικά αποτελέσματα, τα οποία έχουν το δικό τους ενδιαφέρον.

**Λήμμα 0.1.3.** Έστω  $A, B, C$  υποομάδες μια ομάδας  $G$  με  $B \leq A$ . Δείξτε ότι  $A \cap (BC) = B(A \cap C)$ .

(Προσοχή! Τα  $A \cap (BC)$  και  $B(A \cap C)$  ενδέχεται να μην είναι υποομάδες της  $G$ )

*Απόδειξη.* Είναι η πρώτη άσκηση στην τρίτη ομάδα ασκήσεων.

□

**Λήμμα 0.1.4.** Έστω  $B \triangleleft A \leq G$  και  $C \leq G$ , τότε  $B \cap C \triangleleft A \cap C$  και  $(A \cap C)/(B \cap C) \approx B(A \cap C)/B$ .

Αν επιπλέον  $C \triangleleft G$ , τότε  $BC \triangleleft AC$  και  $AC/BC \approx A/B(A \cap C)$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι προφανής και χρησιμοποιεί το δεύτερο Θεώρημα των ισομορφισμών.

Ας αποδείξουμε την  $(A \cap C)/(B \cap C) \approx B(A \cap C)/B$ .

Έχουμε  $(A \cap C)/(B \cap C) = (A \cap C)/(A \cap C) \cap B \approx B(A \cap C)/B$

(στην πρώτη ισότητα δεν κάναμε τίποτε άλλο απ' το να τμήσουμε με μια μεγαλύτερη ομάδα, την  $A$ , οπότε το αποτέλεσμα δεν αλλάζει και για το ισομορφισμό χρησιμοποιήσαμε το δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών  $MN/N \approx M/(M \cap N)$ ).

Ας αποδείξουμε την  $AC/BC \approx A/B(A \cap C)$ .

Έχουμε  $A/B(A \cap C) = A/A \cap (BC) \approx A(BC)/BC = AC/BC$ .

(η πρώτη ισότητα απορρέει από το προηγούμενο λήμμα και ο ισομορφισμός από το δεύτερο θεώρημα των ισομορφισμών.)

□

**Πρόταση 0.1.5.** Έστω  $C_1 \triangleleft A_1 \leq G$  και  $C_2 \triangleleft A_2 \leq G$ . Τότε

$$(A_1 \cap C_2)C_1 \triangleleft (A_1 \cap A_2)C_1,$$

$$(A_2 \cap C_1)C_2 \triangleleft (A_2 \cap A_1)C_2 \text{ και}$$

$$(A_1 \cap A_2)C_1/(A_1 \cap C_2)C_1 \approx (A_2 \cap A_1)C_2/(A_2 \cap C_1)C_2.$$

*Απόδειξη.* Οι κανονικότητες είναι προφανείς.

Θα δείξουμε τον ισομορφισμό.

Θέτουμε  $B = (A_1 \cap C_2)(A_2 \cap C_1)$ , τότε  $(A_1 \cap C_2)C_1 = BC_1$  (γιατί;;;) μα αφού  $A_2 \cap C_1 \leq C_1$ .

Ομοίως  $(A_2 \cap C_1)C_2 = BC_2$ . Επομένως ο προς απόδειξη ισομορφισμός

$$(A_1 \cap A_2)C_1/(A_1 \cap C_2)C_1 \approx (A_2 \cap A_1)C_2/(A_2 \cap C_1)C_2 \text{ γίνεται}$$

$$(A_1 \cap A_2)C_1/BC_1 \approx (A_2 \cap A_1)C_2/BC_2.$$

Τώρα το πρώτο μέλος της προς απόδειξη σχέσης (βάσει του προηγούμενου λήμματος γίνεται)

$$(A_1 \cap A_2)C_1/BC_1 \approx (A_1 \cap A_2)/B(A_1 \cap A_2 \cap C_1) = (A_1 \cap A_2)/B.$$

Ομοίως το δεύτερο μέλος της προς απόδειξη σχέσης (βάσει του προηγούμενου λήμματος γίνεται)

$$(A_2 \cap A_1)C_2/BC_2 \approx (A_2 \cap A_1)/B(A_2 \cap A_1 \cap C_2) = (A_2 \cap A_1)/B. \dots \text{και τέλος.}$$

□

Τώρα είμαστε στη θέση να αποδείξουμε ένα από τα βασικότερα θεωρήματα στη Θεωρία Ομάδων.

**Θεώρημα 0.1.6.** Έστω δύο σειρές

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G \text{ και}$$

$$H = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft K_2 \dots \triangleleft K_{m-1} \triangleleft K_m = G$$

με την ίδια "αρχή" και το ίδιο "τέλος".

Τότε υπάρχουν ισοδύναμες επιλεπτόνσεις τους.

*Απόδειξη.* Η ιδέα είναι απλή. Σε κάθε δύο διαδοχικούς όρους  $H_{i-1}, H_i$  θα παρεμβάλουμε  $m-1$  το πλήθος όρους και σε κάθε δύο διαδοχικούς όρους  $K_{j-1}, K_j$  θα παρεμβάλουμε  $n-1$  το πλήθος όρους, οπότε θα προκύψουν δύο επιλεπτόνσεις των αρχικών σειρών με το ίδιο μήκος  $nm$ . Πώς θα γίνει αυτή η παρεμβολή για να πετύχουμε ισόμορφα πηλίκα;

Για τους διαδοχικούς όρους  $H_{i-1}, H_i$  οι όροι που θα παρεμβληθούν ορίζονται ως εξής:

$$H_{ij} = (H_i \cap K_j)H_{i-1} \text{ για } j = 1, 2, \dots, m$$

Για τους διαδοχικούς όρους  $K_{j-1}, K_j$  οι όροι που θα παρεμβληθούν ορίζονται ως εξής:

$$K_{ji} = (K_j \cap H_i)K_{j-1} \text{ για } i = 1, 2, \dots, n.$$

Πριν προχωρήσουμε ας παρατηρήσουμε ότι

$$H_{i0} = (H_i \cap K_0)H_{i-1} = H_{i-1},$$

$$H_{im} = (H_i \cap K_m)H_{i-1} = H_i \text{ και}$$

$$K_{j0} = (K_j \cap H_0)K_{j-1} = K_{j-1},$$

$$K_{jn} = (K_j \cap H_n)K_{j-1} = K_j.$$

Άρα τελικά έχουμε τις σειρές

$$H = H_0 = H_{10} \leq H_{11} \leq \dots H_{1m} = H_1 = H_{20} \dots H_{nm} = H_n = G \text{ και}$$

$$H = K_0 = K_{10} \leq K_{11} \leq \dots K_{1n} = K_1 = K_{20} \dots K_{mn} = K_m = G.$$

Τώρα έρχεται η στιγμή να εφαρμόσουμε την προηγούμενη πρόταση επιλέγοντας "αριστοτεχνικά" τις υποομάδες που θα παίξουν τον ρόλο των  $C_1 \triangleleft A_1$  και  $C_2 \triangleleft A_2$ . Συγκεκριμένα θέτουμε  $C_1 = H_{i-1}$ ,  $A_1 = H_i$  και  $C_2 = K_{j-1}$ ,  $A_2 = K_j$ .

Πιστή τώρα εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης μας δίνει ότι  $H_{ij}/H_{i(j-1)} \approx K_{ji}/K_{(j-1)i}$ .

Αυτή η διαδικασία γίνεται για όλες τις δυνατές επιλογές των ζευγών δεικτών  $i, j$ , όπου  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Οπότε τελειώσαμε!!

□

Μια σημαντική παρατήρηση.

Από τον τρόπο κατασκευής των δύο επιλεπτόσεων βλέπουμε ότι υπάρχουν διαδοχικοί όροι, οι οποίοι ενδέχεται να είναι ίσοι, οπότε το αντίστοιχο πηλίκο είναι τετριμμένο, αλλά τότε και το αντίστοιχο πηλίκο (στην άλλη σειρά) είναι τετριμμένο.

Για παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι  $H_{ij} = (H_i \cap K_j)H_{i-1} = H_{i(j-1)} = (H_i \cap K_{j-1})H_{i-1}$ , τότε όμως και  $K_{ji} = (K_j \cap H_i)K_{j-1} = K_{(j-1)i} = (K_j \cap H_{i-1})K_{j-1}$  (γιατί;;;).

Ας δούμε ένα πόρισμα.

**Πόρισμα 0.1.7.** Υποθέτουμε ότι μια ομάδα  $G$  έχει μια συνθετική σειρά

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G, \text{ τότε κάθε άλλη σειρά}$$

$$H = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft K_2 \dots \triangleleft K_{m-1} \triangleleft K_m = G$$

υπάρχει μια επιλέπτυνση, η οποία είναι και αυτή συνθετική.

Ειδικότερα, δύο συνθετικές σειρές μιας ομάδας είναι πάντα ισομορφικές.

Απόδειξη. Προφανής.

□

Εφαρμογή: Το θεμελιώδες Θεώρημα της αριθμητικής.

Ένα άλλο παράδειγμα.

Έστω  $S_n$  η ομάδα μεταθέσεων,  $n \geq 5$ . Δείξτε ότι δεν υπάρχουν υποκανονικές υποομάδες της  $S_n$ , εκτός της  $A_n$ .

Σε μια πεπερασμένη  $p$ - ομάδα κάθε υποομάδα είναι υποκανονική.

**Επιλύσιμες σειρές-Η παράγωγος σειρά.**

Πριν ξεκινήσουμε, ας διευκρινίσουμε κάτι.

Μέχρι τώρα, όταν είχαμε μια ομάδα  $G$  και  $H$  μια υποομάδα της, ενδιαφερόμασταν για το πώς "προσεγγίζουμε" την  $G$  μέσω μιας (υπο)κανονικής σειράς

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G, \text{ μελετώντας τα πηλίκα } H_i/H_{i+1}.$$

Όταν, όμως, έχουμε μια ομάδα  $G$  και θέλουμε να την μελετήσουμε μέσω υποκανονικών σειρών της, τότε, επειδή δεν έχουμε συγκεκριμένη υποομάδα, ξεκινάμε από την ομάδα  $G$  πέρνοντας μια κανονική της υποομάδα  $G_1$  και κατασκευάζουμε τους όρους  $G = G_0 \triangleright G_1$ . Κατόπιν επιλέγουμε μια κανονική υποομάδα της  $G_1$ , έστω  $G_2$ , και συμπληρώνουμε  $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2$  και συνεχίζουμε. ....

Οπότε, πρώτη παρατήρηση είναι ότι τώρα οι δείκτες "αυξάνονται" ενώ οι υποομάδες "μικραίνουν". Αυτό είναι το "τυπικό".

Η δεύτερη παρατήρηση είναι πιο ουσιαστική. Ξεκινώντας να επιλέγουμε τις υποομάδες  $G_i$  (τυχαία) θα φθάσουμε (σε πεπερασμένα βήματα) στην τετριμμένη ομάδα;

Μια τρίτη παρατήρηση είναι ακόμη πιο ουσιαστική. Κατασκευάζοντας μια τέτοια σειρά, η οποία έστω ότι, τερματίζει στην τετριμμένη ομάδα, τι πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε για τις ιδιότητες της ομάδας  $G$ ;

Άρα, απαιτούμε να μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μιας σειράς

$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = 1$ , όπου τα πηλίκα  $G_i/G_{i+1}$  να έχουν ορισμένες ιδιότητες.

Μια σειρά  $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n \triangleright \dots$ , η οποία δεν τερματίζει κατ' ανάγκη, αλλά όλα τα πηλίκα  $G_i/G_{i+1}$  είναι αβελιανές ομάδες θα ονομάζεται **επιλύσιμη** σειρά.

Στην περίπτωση, όπου μια επιλύσιμη σειρά τερματίζει στην τετριμμένη ομάδα, η ομάδα θα ονομάζεται επιλύσιμη.

Προφανώς οι αβελιανές ομάδες είναι επιλύσιμες.

Επίσης, οι διεδρικές ομάδες  $D_{2n}$  είναι προφανώς επιλύσιμες (γιατί;;)

Μια πεπερασμένη  $p$ -ομάδα είναι επίσης επιλύσιμη (γιατί;;).

Αλλά υπάρχουν και ομάδες οι οποίες δεν είναι επιλύσιμες. Γνωρίζουμε κάποια(ες);;

Το σημαντικό στην ιδιότητα της επιλυσιμότητας ομάδων είναι ότι "κληρονομείται" στις υποομάδες και τα πηλίκα και "διατηρείται" στις επεκτάσεις.

**Θεώρημα 0.1.8.** Έστω  $G$  ομάδα. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

(i) Η ομάδα  $G$  είναι επιλύσιμη.

(ii) Κάθε υποομάδα της και κάθε πηλίκο της είναι επιλύσιμες ομάδες.

Απόδειξη. (i)  $\implies$  (ii)

Έστω η επιλύσιμη σειρά

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = 1.$$

και  $H \leq G$ . Ορίζουμε ως  $H_i = H \cap G_i$ . τότε ορίζεται η σειρά.

$$H = H_0 \triangleright H_1 \triangleright H_2 \triangleright \dots \triangleright H_{n-1} \triangleright H_n = 1.$$

Προφανώς  $H_{i+1} \triangleleft H_i$  (γιατί;;)

Επίσης  $H_i/H_{i+1} = (H \cap G_i)/(H \cap G_{i+1}) = (H \cap G_i)/(H \cap G_{i+1}) \cap G_i \approx (H \cap G_i)G_{i+1}/G_{i+1} \leq G_i/G_{i+1}$ . Άρα τα πηλίκα είναι αβελιανά, δηλαδή η  $H$  είναι επιλύσιμη.

Γιατί ισχύει η τελευταία ισότητα; Γιατί ισχύει η  $\approx$  ;;

Έστω τώρα  $N \triangleleft G$ . Από την προηγούμενη σειρά ορίζεται η σειρά

$$G/N = G_0N/N \triangleright G_1N/N \triangleright G_2N/N \triangleright \dots \triangleright G_{n-1}N/N \triangleright G_nN/N = 1.$$

Γιατί στην τελευταία σειρά ισχύει η κανονικότητα διαδοχικών όρων;;;

Θα δείξουμε ότι τα πηλίκα  $(G_{i-1}N/N)/(G_iN/N) \approx (G_{i-1}N)/(G_iN)$  είναι αβελιανά. πράγματι,  $G_{i-1}N/G_iN = G_{i-1}(G_iN)/G_iN \approx G_{i-1}/G_{i-1} \cap G_iN \approx (G_{i-1}/G_{i-1})/(G_{i-1} \cap G_iN)/G_{i-1}$ ,

ο τελευταίος όρος είναι πηλίκο αβελιανής ομάδας άρα βελιανή ομάδα και ...τέλος.

(ii)  $\Leftarrow$  (i)

Έστω  $N \triangleleft G$  και  $N = N_0 \triangleright N_1 \triangleright \dots \triangleright N_{k-1} \triangleright N_k = 1$  και  $G/N = M_0/N \triangleright M_1/N \triangleright \dots \triangleright M_{m-1}/N \triangleright M_m/N = 1$  δύο επιλύσιμες σειρές. Τότε η σειρά  $G = M_0 \triangleright M_1 \dots \triangleright M_{m-1} = N = N_0 \triangleright N_1 \triangleright \dots \triangleright N_{k-1} \triangleright N_k = 1$  (προσοχή στη "συγκόλληση") είναι επιλύσιμη και ....τέλος.  $\square$

Το πρόβλημα που προκύπτει, με τον ορισμό που δώσαμε, είναι ότι όταν έχουμε μια ομάδα  $G$ , πώς θα βρούμε μια (γνήσια) κανονική υποομάδα της  $M$  ώστε το πηλίκο  $G/M$  να είναι αβελιανή ομάδα και να μπορέσουμε να ξεκινήσουμε την αναζήτηση, αν τελικά η  $G$  είναι επιλύσιμη;

Θα δούμε ότι (σχεδόν) πάντα μπορούμε να βρούμε μια κανονική υποομάδα  $M$ , ώστε το πηλίκο  $G/M$  να είναι αβελιανό.

Ας κάνουμε την "ανάλυση του προβλήματος".

Έστω  $G$  μια ομάδα και  $a, b \in G$ , τότε έχουμε  $ab = ba(a^{-1}b^{-1}ab)$ . Επομένως τα  $a, b$  μετατίθενται αν και μόνο αν  $a^{-1}b^{-1}ab = 1$ . Με διαφορετική έκφραση το στοιχείο  $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$  υποδηλώνει κατά πόσο "απέχουν" τα δύο στοιχεία από του να μετατίθενται. Το στοιχείο  $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$  θα ονομάζεται **μεταθέτης** των  $a, b$ .

Έστω τώρα το σύνολο  $\{[a, b] \mid a, b \in G\}$  όλων των μεταθετών. Το πρώτο ερώτημα που προκύπτει είναι αν το σύνολο αυτό αποτελεί ομάδα.

Η απάντηση είναι όχι, διότι το γινόμενο δύο μεταθετών δεν είναι πάντα μεταθέτης. Ενώ το αντίστροφο ενός μεταθέτη  $[a, b]^{-1} = \dots [b, a]$ .

**Παρατήρηση 0.1.9.** Έστω  $A, B$  δύο (μη κενά) υποσύνολα της ομάδας  $G$ , τότε ορίζουμε ως  $[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$  την υποομάδα της  $G$  την παραγόμενη από όλους τους μεταθέτες, όπου στην πρώτη θέση έχουν στοιχείο του συνόλου  $A$  και στην δεύτερη θέση στοιχείο του συνόλου  $B$ .

Προφανώς,  $A \subseteq C, B \subseteq D \implies [A, B] \subseteq [C, D]$ .

Έστω  $G' = \langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle$  η υποομάδα της  $G$  η παραγόμενη από όλους τους μεταθέτες. Η υποομάδα αυτή θα ονομάζεται **παράγωγος** (υπο)ομάδα της  $G$  και, εκτός του συμβολισμού  $G'$ , θα χρησιμοποιούμε και τους συμβολισμούς:  $[G, G], G^{(1)}, \gamma_2(G)$ .

Η παράγωγος υποομάδα θα "διαδραματίσει" στο εξής σημαντικό ρόλο.

Κατ' αρχάς είναι κανονική υποομάδα της  $G$  (γιατί;;;). Αρκεί να υπολογίσουμε το συζυγές  $g[a, b]g^{-1} = \dots$  ενός μεταθέτη.

Η σημαντική παρατήρηση είναι ότι προφανώς η ομάδα  $G$  είναι αβελιανή αν και μόνο αν η παράγωγος υποομάδα  $G'$  είναι τετριμμένη.

Επομένως, τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην "σύνθεση του προβλήματος".

**Πρόταση 0.1.10.** Έστω  $G$  ομάδα και  $H \leq G$ .

Τα ακολουθα είναι ισοδύναμα.

(i)  $H$  είναι κανονική υποομάδα και η  $G/H$  είναι αβελιανή ομάδα.

(ii)  $G' \leq H$ .

*Απόδειξη.* (i)  $\implies$  (ii)

Έστω  $a, b \in G$ , επειδή η  $G/H$  έχει υποτεθεί αβελιανή έχουμε ότι  $aH \cdot bH = bH \cdot aH$ , δηλαδή  $(aH)^{-1} \cdot (bH)^{-1} \cdot aH \cdot bH = H$ , οπότε έχουμε  $[a, b] \in H$ , ... Άρα  $G' \leq H$ .

(ii)  $\implies$  (i)

Έστω  $g \in G$ , τότε για κάθε  $h \in H$  έχουμε ότι  $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh \in G' \leq H$ , δηλαδή  $g^{-1}hg \in H$ . Άρα η  $H$  είναι κανονική υποομάδα της  $G$ .

Προφανώς από την σχέση  $[a, b] \in G' \leq H$  έπεται ότι  $aH \cdot bH = bH \cdot aH$  για κάθε  $a, b \in G$ .  $\square$

Η πρόταση αυτή είναι σημαντική, διότι αποδεικνύει ότι η παράγωγος υποομάδα  $G'$  μιας ομάδας  $G$  είναι η μικρότερη, ως προς το περιέχεται, με την ιδιότητα το πηλίκο  $G/G'$  να είναι αβελιανή ομάδα. Δυϊκά το πηλίκο  $G/G'$  είναι το μεγαλύτερο από τα αβελιανά πηλικά της, υπό την έννοια ότι, κάθε άλλο αβελιανό πηλικο της  $G$  είναι πηλικο του  $G/G'$ .

Όπως ορίσαμε την παράγωγο ομάδα  $[G, G]$  μιας ομάδας  $G$  έτσι μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο ομάδα  $[[G, G], [G, G]]$  της παραγώγου ομάδας  $[G, G]$ . Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί αναδρομικά, οπότε, με απλούστευση του συμβολισμού, ορίζουμε  $G = G^{(0)}, G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}], \dots G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}], \dots$

Οι υποομάδες που ορίσαμε με αυτό τον τρόπο αποτελούν τους όρους της **παραγώγου** σειράς της  $G$ . Δηλαδή έχουμε την σειρά

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}] \geq G^{(2)} \geq \dots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \dots$$

Από τον τρόπο ορισμού της παραγώγου σειράς έχουμε ότι κάθε πηλικο  $G^{(i)}/G^{(i+1)}$  είναι αβελιανή ομάδα.

**Θεώρημα 0.1.11.** Έστω  $G$  μια ομάδα,  $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_{i-1} \triangleright G_i \triangleright \dots$  μια επιλύσιμη σειρά και  $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}] \geq G^{(2)} \geq \dots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \dots$  η παράγωγος σειρά της  $G$ . Τότε ισχύει ότι  $G_i \geq G^{(i)}$  για κάθε  $i$ .

*Απόδειξη.* Προφανώς από την Πρόταση 0.1.10 έχουμε ότι  $G_1 \geq G^{(1)}$ . Υποθέτουμε ότι  $G_i \geq G^{(i)}$ , τότε έχουμε. Η  $G_i/G_{i+1}$  είναι αβελιανή, από την υπόθεση, άρα πάλι από την 0.1.10, έχουμε ότι  $[G_i, G_i] \leq G_{i+1}$ . Έχουμε υποθέσει όμως ότι  $G_i \geq G^{(i)}$ , άρα από την Παρατήρηση έχουμε ότι  $G^{i+1} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \leq [G_i, G_i] \leq G_{i+1}$ . □

**Πόρισμα 0.1.12.** Μια ομάδα  $G$  είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η παράγωγος σειρά τερματίζει σε πεπερασμένα βήματα, δηλαδή  $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}] \geq G^{(2)} \geq \dots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \dots \geq G^{(n)} = 1$ .

Μάλιστα δέ το  $n$  είναι ο μικρότερος "εκθέτης" με την ιδιότητα αυτή και θα ονομάζεται κλάση επιλυσιμότητας, ή παράγωγο μήκος της  $G$ .

Οι όροι της παραγωγού σειράς μιας ομάδας  $G$  δεν είναι απλώς ο ένας κανονική υποομάδα του προηγούμενου ( $G^{(i+1)} \triangleleft G^{(i)}$ ), αλλά ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο.

**Πρόταση 0.1.13.** Κάθε όρος  $G^{(i)}$  της παραγωγού σειράς μιας ομάδας  $G$  είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα.

*Απόδειξη.* Υπεθυμίζουμε τι σημαίνει πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα.

Έστω  $G$  ομάδα και  $M$  μια υποομάδα της. Η  $M$  θα ονομάζεται πλήρως αναλλοίωτη, αν για κάθε  $\vartheta$  ενδομορφισμό της  $G$  έπεται ότι  $\vartheta(M) \leq M$ .

Έστω  $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$  ένας μεταθέτης και  $\vartheta$  ένας ενδομορφισμός της  $G$ , τότε  $\vartheta([a, b]) = [\vartheta(a), \vartheta(b)]$ . Αυτό είναι αρκετό για την απόδειξη του ισχυρισμού. □

Επομένως ως πόρισμα έχουμε ότι κάθε όρος της παραγωγού σειράς είναι χαρακτηριστική υποομάδα της  $G$ .

Όπως είπαμε όλα αυτά γίνονται για να μελετήσουμε μια ομάδα με την βοήθεια υποομάδων και πηλίκων της.

Αντί ασκήσεως, ας δούμε την επομένη πρόταση.

**Πρόταση 0.1.14.** Έστω  $G$  ομάδα και  $H, K$  κανονικές υποομάδες της. Υποθέτουμε ότι τα πηλίκια  $G/H$  και  $G/K$  είναι επιλύσιμες ομάδες. Τότε το πηλίκιο  $G/(H \cap K)$  είναι επιλύσιμη ομάδα.

*Απόδειξη.* 1<sup>η</sup> Απόδειξη.

Έστω  $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}] \geq G^{(2)} \geq \dots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \dots$  η παράγωγος σειρά της  $G$ , τότε  $[G/H, G/K] = ([G, G]H)/H$ , (γιατί;;). Συνεπώς η  $G/H$  είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν  $G^{(n)} \leq H$  για κάποιο  $n$ . Ομοίως η  $G/K$  είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν  $G^{(m)} \leq K$  για κάποιο  $m$ . Συνεπώς, βάσει της υποθέσεως, έχουμε ότι  $G^{(s)} \leq H \cap K$  για  $s = \max(n, m), \dots$

2<sup>η</sup> Απόδειξη.

Ός γνωστόν (;;) η ομάδα  $G/(H \cap K)$  εμφυτεύεται στο ευθύ γινόμενο  $G/H \times G/K$ .

Όμως το ευθύ γινόμενο επιλυσίμων ομάδων είναι επιλύσιμο (γιατί;;). Επομένως έπεται το αποτέλεσμα.

3<sup>η</sup> Απόδειξη.

Από το δεύτερο Θεώρημα των ισομορφισμών έχουμε ότι η  $H/(H \cap K) \approx HK/K \leq G/K$  είναι αβελιανή. Αλλά  $(G/(H \cap K))/(H/(H \cap K)) \approx G/H$  και το αποτέλεσμα έπεται από την Πρόταση 0.1.10.

Επίτηδες είδαμε τρεις αποδείξεις. Στην πραγματικότητα μια είναι η απόδειξη και στηρίζεται στην Πρόταση 0.1.10. □

Ενδιαφέρον αποκτά η προηγούμενη πρόταση στην περίπτωση όπου η τομή  $H \cap K$  είναι τετριμμένη, οπότε η ομάδα  $G$  είναι επιλύσιμη.

**Πρόταση 0.1.15.** *Μια πεπερασμένη ομάδα είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν έχει μια συνθετική σειρά με όρους κυκλικές ομάδες με τάξη πρώτο αριθμό.*

*Απόδειξη.* Το αποτέλεσμα στηρίζεται στην εξής σημαντική παρατήρηση.

Κάθε επιλέπτυνση μιας επιλύσιμης σειράς είναι επιλύσιμη σειρά.

Πράγματι, αν  $G_i, G_{i+1}$  είναι διαδοχικοί όροι μιας επιλύσιμης σειράς, και παρεμβάλουμε την ομάδα  $G_i > K > G_{i+1}$ , τότε τα πηλίκα  $G_i/K$  και  $K/G_{i+1}$  είναι αβελιανά (γιατί;;). □

Ένα πρόβλημα που ίσως έχετε ήδη εντοπίσει είναι το εξής:

Αν έχουμε την παράγωγο σειρά  $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = [G, G] = [G^{(0)}, G^{(0)}] \geq G^{(2)} \geq \dots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \dots$  μιας ομάδας  $G$ , ποία είναι τα "αίτια" και ορισμένες φορές η σειρά δεν τερματίζει;

Ένα αίτιο είναι σε κάποιο στάδιο να έχουμε  $G^{(i)} = G^{(i+1)} \neq 1$ , οπότε από εκεί και πέρα έχουμε σταθερή την σειρά. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε ομάδες, όπου η παράγωγος υποομάδα τους ισούται με όλη την ομάδα. Γνωρίζουμε τέτοιες ομάδες; Μα φυσικά τις απλές (μη αβελιανές) ομάδες.

Ένα άλλο αίτιο είναι να έχουμε για όλα τα  $i$   $G^{(i)} > G^{(i+1)}$ , αλλά η σειρά να μην τερματίζει ποτέ. Γνωρίζουμε τέτοια παραδείγματα;

Θα δούμε ότι οι ελεύθερες (μη αβελιανές) ομάδες έχουν την ιδιότητα αυτή.

Για να το δούμε αυτό κάνουμε ένα πρωθύστερο.

Θεωρούμε το εξής "Δόγμα": Κάθε υποομάδα ελεύθερης είναι ελεύθερη.

Επομένως αν  $F = F^{(0)} \triangleright F^{(1)} \triangleright \dots \triangleright F^{(i)} \triangleright F^{(i+1)} \triangleright \dots$  είναι παράγωγος σειρά της ελεύθερης ομάδας  $F$ , τότε κάθε όρος είναι ελεύθερη ομάδα και γνήσια υποομάδα στον προηγούμενο όρο (γιατί;;). Μα αφού αν έχουμε μια ελεύθερη ομάδα επί ενός συνόλου  $X$ , τότε σε κάθε μεταθέτη  $[u(x_i), v(x_i)]$ , προφανώς (;) το άθροισμα των εκθετών κάθε γεννήτορα είναι ίσον με μηδέν. Άρα οι γεννήτορες  $x_i$  δεν ανήκουν στην παράγωγο υποομάδα.

Θα μπορούσαμε να παρακάμψουμε το προηγούμενο δόγμα και να αποδείξουμε ότι μια ελεύθερη ομάδα δεν είναι επιλύσιμη με αμεσότερο τρόπο.

Πράγματι, υποθέτουμε ότι η παράγωγος σειρά τερματίζει  $F = F^{(0)} \triangleright F^{(1)} \triangleright \dots \triangleright F^{(i)} \triangleright F^{(i+1)} \triangleright F^{(n)} \triangleright F^{(n+1)} = 1$ . Τι σημαίνει αυτό; Ότι η  $F^{(n)}$  είναι αβελιανή. Τι έχουμε δει (Άσκηση 2 Ομάδα D); Οι μόνες αβελιανές ομάδες μιας ελεύθερης ομάδας είναι οι κυκλικές. Άρα έχουμε μια κανονική κυκλική υποομάδα μιας ελεύθερης ομάδας, δηλαδή  $F^{(n)} = \langle w \rangle$ . Τι σημαίνει αυτό; Ότι  $g^2$  μετατίθεται με το  $w$  για κάθε  $g \in F$ , άτοπο.

### Κεντρικές σειρές- Μηδενοδύναμες ομάδες

Αν έχουμε μια (υπο)κανονική σειρά  $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_{i-1} \triangleright G_i \triangleright \dots$  μιας ομάδας  $G$ , είδαμε ότι για να μελετήσουμε την  $G$  απαιτούμε τα πηλίκα  $G_i/G_{i+1}$  να πληρούν κάποιες ιδιότητες. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των επιλυσίμων ομάδων, απαιτούμε τα πηλίκα αυτά να είναι αβελιανές ομάδες.

Θα μπορούσαμε να θέσουμε πιο απαιτητικούς όρους.

**Ορισμός 0.1.16.** *Μια κανονική σειρά  $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_{i-1} \triangleright G_i \triangleright \dots$  θα ονομάζεται κεντρική αν  $G_i/G_{i+1} \leq Z(G/G_{i+1})$ .*



---

Προσοχή! εδώ απαιτούμε κάθε όρος να είναι κανονική σε όλη την ομάδα  $G$  και όχι μόνο στον αμέσως προηγούμενο.

Προφανώς κάθε κεντρική σειρά είναι επιλύσιμη. Προσοχή! το αντίστροφο δεν ισχύει.

Για παράδειγμα, η σειρά  $S_3 \triangleright A_3 \triangleright 1$  είναι επιλύσιμη, αλλά όχι κεντρική.

**Πρόταση 0.1.17.** Η σειρά  $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_{i-1} \triangleright G_i \triangleright \dots$   
είναι κεντρική αν και μόνο αν  $[G, G_{i-1}] \leq G_i$ .

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι η σειρά είναι κεντρική. Τότε  $G_{i-1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ .

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε  $g \in G$  και κάθε  $h \in G_{i-1}$  έχουμε ότι

$[gG_i, hG_i] = 1G_i$ , δηλαδή  $[g, h] \in G_i$ .

Αντίστροφα.....

□