0.1 Σειρές.

Ορισμοί.

Έστω G μια ομάδα και H μια κανονική υποομάδα της, τότε, ως γνωστόν, ορίζεται η ομάδα πηλίκο G/H. Ένα από τα προβλήματα/πρόκληση, που αντιμετωπίζουμε, είναι το πώς θα "αντλήσουμε" πληροφορίες για τις ιδιότητες της ομάδας G μελετώντας τις ομάδες H και G/H. Γενικότερα, πώς θα αντλήσουμε πληροφορίες για μια από τις ομάδες $G,\ H,\ G/H$ μλετώντας τις άλλες δύο.

Όταν όμως έχουμε μια ομάδα G και μια υποομάδα της H, η οποία δεν είναι κανονική, τότε, επείδη το πηλίκο G/H δεν ορίζεται, αναζητούμε αν υπάρχει μια ακολουθία υποομάδων

$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$, όπου με αυτόν τον τρόπο να *προσεγγίζουμε* την G.

Προσοχή! Κάθε H_{i-1} είναι κανονική στην επομένη της H_i, αλλά δεν είναι κατ'ανάγκη κανονική στην ομάδα G.

Αν υπάρχει μια τέτοια ακολουθία, τότε αυτή θα ονομάζεται **(υπο)κανονική σειρά** με αρχικό όρο την υποομάδα H και τελικό όρο την ομάδα G, οι ομάδες H_{i-1}/H_i τα **πηλίκα** της σειράς, το δε πλήθος n θα ονομάζεται το **μήκος** της σειράς.

Εξυπακούεται ότι οι όροι μια σειράς είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Μερικές φορές, για τεχνικούς λόγους, θα επιτρέπουμε να έχουμε δύο διαδοχικούς όρους ίσους.

Πριν ό,τιδήποτε άλλο να διευκρινίσουμε ότι στην περίπτωση όπου κάθε όρος της σειράς είναι κανονική υποομάδα στην ομάδα G, τότε έχουμε μια **κανονική** σειρά. (Πολλοί αναφέρουν όλες τις σειρές αυτού του είδους ως κανονικές σειρές. Εδώ θα το διευκρινίζουμε κάθε φορά, όταν υπάρχει κίνδυνος να προκληθεί σύγχυση.)

Μετά τους ορισμούς και τις διευκρινίσεις, ας δούμε μερικά ερωτήματα που εγείρονται.

1. Μεταξύ μιας υποομάδας H και της ομάδας G μπορούν υπάρξουν σειρές και πόσες;

2. Το μήκος δύο σειρών είναι πάντα σταθερό;

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Έστω $G = \langle a \rangle$ η άπειρη κυκλική και $H = \langle a^{pqr} \rangle$, όπου $p,\ q,\ r$ πρώτοι αριθμοί, τότε μπορούμε να βρούμε πολλές σειρές μεταξύ της H και της G. Ας δούμε μερικές εξ αυτών:

Προφανώς η $H < G$ είναι μια κανονική σειρά. Αλλά βλέπουμε ότι η

$H < \langle a^p \rangle < G$ είναι μια άλλη σειρά, όπως και ή

$H < \langle a^{pq} \rangle < \langle a^p \rangle < G$. Όπως βλέπουμε κάθε μια από αυτές προέρχεται από την προηγούμενη παρεμβάλοντας έναν ενδιάμεσο όρο. Αν όμως προσπαθήσουμε στην τελευταία σειρά να παρεμβάλουμε (γνησίως) άλλους όρους, τότε αυτό δεν είναι δυνατόν (γιατί;).

Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις ας δώσουμε δύο ορισμούς:

Έστω $H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$ και

$H = K_0 \lhd K_1 \lhd K_2 \cdots \lhd K_{m-1} \lhd K_m = G$ δύο σειρές.

Η δεύτερη σειρά θα ονομάζεται (γνήσια) **επιλέπτυνση** της πρώτης, αν "προέρχεται" από την πρώτη δια της παρεμβολής κάποιων όρων. Αν θέλουμε να το εκφράσουμε τυπικά. Η δεύτερη είναι επιλέπτυνση της πρώτης αν υπάρχουν όροι K_{j_i} ούτως ώστε $H_i = K_{j_i}$ (όπου οι δείκτες κινούνται αναλόγως). Όπου, οι όροι της δεύτερης σειράς είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και $n < m$ (εξ ού το γνήσια). Στην τρίτη σειρά όμως στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι δεν μπορούμε να παρεμβάλουμε όρους ώστε να επιτύχουμε μια γνήσια επιλέπτυνση. Η περίπτωση αυτή υπακούει στον εξής ορισμό:

Μια σειρά θα ονομάζεται **συνθετική**, αν δεν επιδέχεται γνήσιες επιλεπτύνσεις.

Συνθετικές, ισοδύναμες (ισόμορφες) σειρές

Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν έχουμε μια σειρά, κατά πόσο μπορούμε με (διαδοχικές) επιλεπτύνσεις να φθάσουμε σε μια συνθετική σειρά. Επίσης, πώς αναγνωρίζουμε αν μια σειρά είναι συνθετική.

Προφανώς, αν έχουμε την σειρά

$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$ με την H πεπερασμένου δείκτη, τότε αυτή μπορεί να επιλεπτυνθεί σε μία συνθετική σειρά.

Ειδικότερα, κάθε σειρά μιας πεπερασμένης ομάδας μπορεί να επιλεπτυνθεί σε μια συνθετική σειρά.

Αν έχουμε όμως την άπειρη κυκλική ομάδα $G = \langle\, a \,\rangle$, τότε η σειρά $1 \lhd G$ δεν μπορεί να επιλεπτυνθεί σε συνθετική σειρά (γιατί;)

Πρόταση 0.1.1. *Η σειρά $H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$ είναι συνθετική αν και μόνο αν κάθε πηλίκο H_{i-1}/H_i είναι απλή ομάδα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι κάθε πηλίκο είναι απλή ομάδα, και ότι υπάρχει δύο διαδοχικοί όροι H_{i-1}, H_i, όπου μπορούμε να παρεμβάλουμε γνησίως την υποομάδα $H_{i-1} \lhd K \lhd H_i$, τότε στα αντίστοιχα πηλίκα έχουμε $K/H_{i-i} \lhd H_i/H_{i-1}$ με τις ανισώσεις γνήσιες, άτοπο.

Όμοια για το αντίστροφο.

□

Όπως είδαμε, αν έχουμε δύο σειρές, τότε μπορούμε να τις ''συγκρίνουμε'' με τα αν η μια είναι επιλέπτυνση της άλλης.

Το ερώτημα, το οποίο προκύπτει τώρα είναι το εξής: Αν έχουμε δύο σειρές (με ίδια αρχή και τέλος), θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα ''άλλο μέτρο'' σύγκρισης;

Ορισμός 0.1.2. *Οι σειρές*

$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$ *και*

$H = K_0 \lhd K_1 \lhd K_2 \cdots \lhd K_{m-1} \lhd K_m = G$

θα ονομάζονται **ισοδύναμες** *αν υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των των πηλίκων της μιας σειράς και των πηλίκων της άλλης, όπου αντίστοιχα πηλίκα είναι ισόμορφα.*

''Τυπολατρικά'' οι δύο σειρές ονομάζονται ισοδύναμες αν $n = m$ και υπάρχει μια μετάθεση π των δεικτών, ώστε $H_{i-1}/H_i \approx K_{\pi(i)-1}/K_{\pi(i)}$.

Προσοχή ! Παρ' όλο που λέμε στον ορισμό υπάρχει μια μετάθεση δεικτών.... Πολλοί θεωρούν ότι αναγκαστικά $H_{i-1}/H_i \approx K_{i-1}/K_i$ για όλα τα i.

Για παράδειγμα: Έστω $G = \langle\, a \,\rangle$ η άπειρη κυκλική και οι σειρές

$H_0 = \langle a^{pq} \rangle < \mathrm{H}_1 = \langle a^p \rangle < H_2 = \langle a \rangle$ και $\mathrm{K}_0 = \langle a^{pq} \rangle < K_1 = \langle a^q \rangle < K_2 = \langle a \rangle$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί, τότε $H_1/H_0 \approx K_2/K_1$ και $H_2/H_1 \approx K_1/K_0$.

Λόγω του ισομορφισμού μεταξύ των πηλίκων δύο ισοδυνάμων σειρών πολλές φορές αυτές τις σειρές θα τις αποκαλούμε και ισόμορφες.

Ένα άλλο πρόβλημα που προκύπτει είναι το εξής:

Όταν έχουμε μια σειρά, μπορούμε να ''αναπτύξουμε μια μέθοδο'' ώστε να επιτυγχάνουμε επιλεπτύνσεις της, ή κάθε φορά θα επιχειρούμε κατά το δοκούν;

Ας δούμε μερικά αποτελέσματα, τα οποία έχουν το δικό τους ενδιαφέρον.

Λήμμα 0.1.3. *Έστω A, B, C υποομάδες μια ομάδας G με $B \leq A$. Δείξτε ότι $A \cap (BC) = B(A \cap C)$.*

(Προσοχή! Τα $A \cap (BC)$ και $B(A \cap C)$ ενδέχεται να μην είναι υποομάδες της G

Απόδειξη. Είναι η πρώτη άσκηση στην τρίτη ομάδα ασκήσεων.

□

Λήμμα 0.1.4. *Έστω $B \lhd A \leq G$ και $C \leq G$, τότε $B \cap C \lhd A \cap C$ και $(A \cap C)/(B \cap C) \approx B(A \cap C)/B$.*

Αν επιπλέον $C \lhd G$, τότε $BC \lhd AC$ και $AC/BC \approx A/B(A \cap C)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι προφανής και χρησιμοποιεί το δεύτερο Θεώρημα των ισομορφισμών.

Ας αποδείξουμε την $(A \cap C)/(B \cap C) \approx B(A \cap C)/B$.

Έχουμε $(A \cap C)/(B \cap C) = (A \cap C)/(\mathrm{A} \cap C) \cap B \approx B(A \cap C)/B$

(στην πρώτη ισότητα δεν κάναμε τίποτε άλλο απ' το να τμήσουμε με μια μεγαλύτερη ομάδα, την Α, οπότε το αποτέλεσμα δεν αλλάζει και για το ισομορφισμό χρησιμοποιήσαμε το δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών $MN/N \approx M/(M \cap N)$).

Ας αποδείξουμε την $AC/BC \approx A/B(A \cap C)$.

Έχουμε $A/B(A \cap C) = \mathrm{A}/\mathrm{A} \cap (BC) \approx A(BC)/BC = AC/BC$.

(η πρώτη ισότητα απορρέει από το προηγούμενο λήμμμα και ο ισομορφισμός από το δεύτερο θεώρημα των ισομορφισμών.)

□

Πρόταση 0.1.5. *Έστω* $C_1 \lhd A_1 \leq G$ *και* $C_2 \lhd A_2 \leq G$. *Τότε*

$(A_1 \cap C_2)C_1 \lhd (A_1 \cap A_2)C_1$,

$(A_2 \cap C_1)C_2 \lhd (A_2 \cap A_1)C_2$ *και*

$(A_1 \cap A_2)C_1/(A_1 \cap C_2)C_1 \approx (A_2 \cap A_1)C_2/(A_2 \cap C_1)C_2$.

Απόδειξη. Οι κανονικότητες είναι προφανείς.

Θα δείξουμε τον ισομορφισμό.

Θέτουμε $B = (A_1 \cap C_2)(A_2 \cap C_1)$, τότε $(A_1 \cap C_2)C_1 = BC_1$ (γιατί;;;) μα αφού $A_2 \cap C_1 \leq C_1$.

Ομοίως $(A_2 \cap C_1)C_2 = BC_2$. Επομένως ο προς απόδειξη ισομορφισμός

$(A_1 \cap A_2)C_1/(A_1 \cap C_2)C_1 \approx (A_2 \cap A_1)C_2/(A_2 \cap C_1)C_2$ γίνεται

$(A_1 \cap A_2)C_1/BC_1 \approx (A_2 \cap A_1)C_2/BC_2$.

Τώρα το πρώτο μέλος της προς απόδειξη σχέσης (βάσει του προηγουμένου λήμμματος γίνεται)

$(A_1 \cap A_2)C_1/BC_1 \approx (A_1 \cap A_2)/B(A_1 \cap A_2 \cap C_1) = (A_1 \cap A_2)/B$.

Ομοίως το δεύτερο μέλος της προς απόδειξη σχέσης (βάσει του προηγουμένου λήμμματος γίνεται)

$(A_2 \cap A_1)C_2/BC_2 \approx (A_2 \cap A_1)/B(A_2 \cap A_1 \cap C_2) = (A_2 \cap A_1)/B$. .....και τέλος.

□

Τώρα είμαστε στη θέση να αποδείξουμε ένα από τα βασικότερα θεωρήματα στη Θεωρία Ομάδων.

Θεώρημα 0.1.6. *Έστω δύο σειρές*

$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$ *και*

$H = K_0 \lhd K_1 \lhd K_2 \cdots \lhd K_{m-1} \lhd K_m = G$

με την ίδια "αρχή" καιτο ίδιο "τέλος".

Τότε υπάρχουν ισοδύναμες επιλεπτύνσεις τους.

Απόδειξη. Η ιδέα είναι απλή. Σε κάθε δύο διαδοχικούς όρους H_{i-1}, H_i θα παρεμβάλουμε $m-1$ το πλήθος όρους και σε κάθε δύο διαδοχικούς όρους K_{j-1}, K_j θα παρεμβάλουμε $n-1$ το πλήθος όρους, οπότε θα προκύψουν δύο επιλεπτύνσεις των αρχικών σειρών με το ίδιο μήκος nm. Πώς θα γίνει αυτή η παρεμβολή για να πετύχουμε ισόμορφα πηλίκα;

Για τους διαδοχικούς όρους H_{i-1}, H_i οι όροι που θα παρεμβληθούν ορίζονται ως εξής:

$H_{ij} = (H_i \cap K_j)H_{i-1}$ για $j = 1, 2, \ldots, m$

Για τους διαδοχικούς όρους K_{j-1}, K_j οι όροι που θα παρεμβληθούν ορίζονται ως εξής:

$K_{ji} = (K_j \cap H_i)K_{j-1}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$.

Πριν προχωρήσουμε ας παρατηρήσουμε ότι

$\mathrm{H}_{i0} = (H_i \cap K_0)H_{i-1} = H_{i-1}$,

$\mathrm{H}_{im} = (H_i \cap K_m)H_{i-1} = H_i$ και

$K_{j0} = (K_j \cap H_0)K_{j-1} = K_{j-1}$,
$\mathrm{K}_{jn} = (K_j \cap H_n)K_{j-1} = K_j$.
Άρα τελικά έχουμε τις σειρές
$H = H_0 = H_{10} \leq H_{11} \leq \cdots H_{1m} = H_1 = H_{20} \cdots \cdots H_{nm} = H_n = G$ και
$\mathrm{H} = \mathrm{K}_0 = \mathrm{K}_{10} \leq \mathrm{K}_{11} \leq \cdots \mathrm{K}_{1n} = K_1 = K_{20} \cdots \cdots K_{mn} = K_m = G$.

Τώρα έρχεται η στιγμή να εφαρμόσουμε την προηγούμενη πρόταση επιλέγοντας "αριστοτεχνικά" τις υποομάδες που θα παίξουν τον ρόλο των $C_1 \lhd A_1$ και $C_2 \lhd A_2$. Συγκεκριμένα θέτουμε $C_1 = H_{i-1}$, $A_1 = H_i$ και $C_2 = K_{j-1}$, $A_2 = K_j$.

Πιστή τώρα εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης μας δίνει ότι $H_{ij}/H_{i(j-1)} \approx K_{ji}/K_{(j-1)\,i}$.

Αυτή η διαδικασία γίνεται για όλες τις δυνατές επιλογές των ζευγών δεικτών i, j, όπου $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Οπότε τελειώσαμε!!

$\square$

Μια σημαντική παρατήρηση. Από τον τρόπο κατασκευής των δύο επιλεπτύνσεων βλέπουμε ότι υπάρχουν διαδοχικοί όροι, οι οποίοι ενδέχεται να είναι ίσοι, οπότε το αντίστοιχο πηλίκο είναι τετριμμένο, αλλά τότε και το αντίστοιχο πηλίκο (στην άλλη σειρά) είναι τετριμμένο.

Για παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι $H_{ij} = (H_i \cap K_j)H_{i-1} = H_{i(j-1)} = (H_i \cap K_{j-1})H_{i-1}$, τότε όμως και $K_{ji} = (K_j \cap H_i)K_{j-1} = K_{(j-1)\,i} = (K_j \cap H_{i-1})K_{j-1}$ (γιατί;;;;).

Ας δούμε ένα πόρισμα.

Πόρισμα 0.1.7. *Υποθέτουμε ότι μια ομάδα G έχει μια συνθετική σειρά*
$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$, *τότε κάθε άλλη σειρά*
$H = K_0 \lhd K_1 \lhd K_2 \cdots \lhd K_{m-1} \lhd K_m = G$
υπάρει μια επιλέπτυνση, η οποία είναι και αυτή συνθετική.
Ειδικότερα, δύο συνθετικές σειρές μιας ομάδας είναι πάντα ισομορφικές.

Απόδειξη. Προφανής.

$\square$

Εφαρμογή: Το θεμελιώδες Θεώρημα της αριθμητικής.
Ένα άλλο παράδειγμα.
Έστω S_n η ομάδα μεταθέσεων, $n \geq 5$. Δείξτε οτι δεν υπάρχουν υποκανονικές υοομάδες της S_n, εκτός της A_n.
Σε μια πεπερασμένη p- ομάδα κάθε υποομάδα είναι υποκανονική.
□□□