

Δείκτης κατάστασης & Κανονικές εξισώσεις

Δοθέντος ενός γραμμικού συστήματος

$$Ax = b,$$

όπου ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$) είναι κακής κατάστασης, αν προσπαθήσουμε να λύσουμε το σύστημα αυτό μέσω των κανονικών εξισώσεων

$$A^T A x = A^T b,$$

ο πίνακας $A^T A$ θα είναι πολύ χειρότερης κατάστασης.

Πράγματι, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \kappa_2(A^T A) &= \|A^T A\|_2 \cdot \|(A^T A)^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}(A^T A)}{\sigma_{\min}(A^T A)} = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)^2}}{\sqrt{\lambda_{\min}(A^T A)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^2(A^T A)}{\lambda_{\min}^2(A^T A)}} = \frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)} = \frac{\sigma_{\max}^2(A)}{\sigma_{\min}^2(A)} = \kappa_2(A)^2. \end{aligned}$$

Εφαρμογή σε Julia

```
1 using LinearAlgebra
2 t = range(0, stop=3, length=400);
3 A = [sin.(t).^2 cos.((1+1e-7)*t).^2 t.^0];
4
5 kappa = cond(A);
6 @show kappa
7
8 x = [1 ; 2 ; 1];
9 b = A*x;
10
11 # Solution via backslash:
12 x_est = A\b;
13 error_est = norm(x_est - x)/norm(x);
14
15 @show error_est
16
17 # Solution via normal equations:
18 M = A'*A; kappa2 = cond(M);
19 bb = A'*b;
20 x_ne = M\b;
21 error_ne = norm(x_ne - x)/norm(x)
22
23 @show kappa2
24 @show error_ne
25
```