

## Διακριτή συνθήκη Picard

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα της μορφής

$$Ax = b.$$

Η διακριτή συνθήκη Picard (discrete Picard condition) εκφράζεται με βάση τις ιδιάζουσες τιμές  $\sigma_i$  και τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του πίνακα  $A$ . Η συνθήκη αυτή καταγράφεται στο ακόλουθο λήμμα, [1], [2, σελ. 81].

### Λήμμα 1.

Το διάνυσμα  $\mathbf{b}$  ικανοποιεί τη διακριτή συνθήκη Picard αν τα γινόμενα κατά απόλυτη τιμή  $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$  φθίνουν γρηγορότερα στο μηδέν από ότι οι ιδιάζουσες τιμές  $\sigma_i$  του πίνακα  $A$ , όπου  $\mathbf{u}_i$  είναι τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του πίνακα  $A$ .

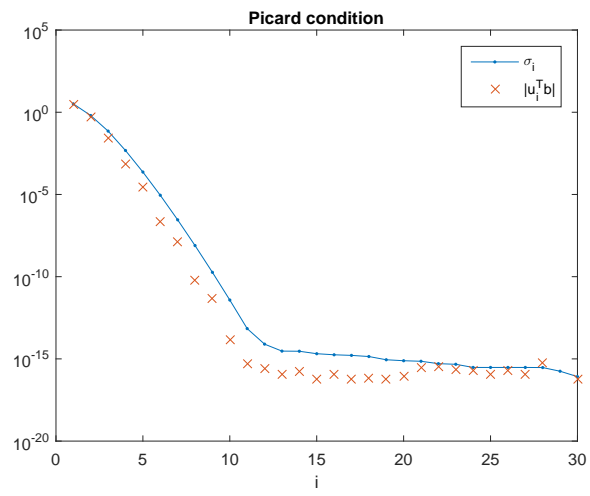
Στο παρακάτω παράδειγμα, σχεδιάζουμε τις ιδιάζουσες τιμές  $\sigma_i$  του πίνακα δοκιμής  $A$  και τα γινόμενα κατά απόλυτη τιμή  $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$ , για τις τιμές του δείκτη  $i$ .

### Παράδειγμα 1. Η διακριτή συνθήκη Picard

Θεωρούμε το πρόβλημα δοκιμής Baart με πίνακα  $A$  μεγέθους  $30 \times 30$ , που προκύπτει από τη διακριτοποίηση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm πρώτου είδους.

Αυτό το πρόβλημα μπορεί να βρεθεί στο πακέτο “Regularization Tools” του Hansen [3], που αφορά διακριτά κακώς τοποθετημένα προβλήματα της μορφής  $Ax = b$ , όπου ο  $A$  έχει πολύ κακή κατάσταση.

Ο πίνακας  $A$  αυτού του προβλήματος έχει δείκτη κατάστασης  $\kappa(A) = 2.8401e17$  και το διάνυσμα  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{30}$  ικανοποιεί τη διακριτή συνθήκη Picard. Πράγματι, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο παρακάτω γράφημα τα γινόμενα κατά απόλυτη τιμή  $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$  φθίνουν γρηγορότερα στο μηδέν από ότι οι ιδιάζουσες τιμές  $\sigma_i$  του πίνακα  $A$ .



Σχήμα 1: Η διακριτή συνθήκη Picard για το πρόβλημα δοκιμής Baart.

# Βιβλιογραφία

- [1] P. C. Hansen, The discrete picard condition for discrete ill-posed problems, BIT 30, pp. 658-672, 1990.
- [2] P. C. Hansen, Rank-deficient and discrete ill-posed problems, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [3] P. C. Hansen, Regularization Tools Version 4.0 for MATLAB 7.3, Numerical Algorithms 46, pp. 189-194, 2007.