Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών

• Το θεώρημα Ανάλυσης Ιδιαζουσών Τιμών

Θεώρημα (SVD)

Έστω A ένας πραγματικός $m \times n$ πίνακας. Τότε υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες U και V έτσι ώστε

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{U} \underset{m\times n}{\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{n\times n}{V^T} = U \Sigma V^T$$

όπου S ένας μη ιδιάζων διαγώνιος πίνακας, με θετικά διαγώνια στοιχεία διατεταγμένα κατά φθίνουσα σειρά. Ο αριθμός των μη μηδενικών διαγώνιων στοιχείων του Σ ισούται με την τάξη του πίνακα A.

Η ανάλυση $A = U\Sigma V^T$ είναι γνωστή σαν ανάλυση ιδιαζουσών τιμών (Singular Value Decomposition - SVD) του πίνακα A.

Ιδιάζουσες τιμές του A: τα διαγώνια στοιχεία του Σ

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r \rightarrow$ θετικές ιδιάζουσες τιμές του A

Αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα: οι στήλες του **U**

Δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα: οι στήλες του **V**

Θεώρημα 1.
Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ πίνακας τάξης r. Τότε υπάρχει ένας μοναδιαίος (ορθογώνιος, αν ο A είναι πραγματικός) πίνακας U διάστασης m, ένας μοναδιαίος (ορθογώνιος) πίνακας V διάστασης n και ένας διαγώνιος πίνακας S διάστασης r με θετικά διαγώνια στοιχεία τέτοιοι ώστε

$$A = U \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \tag{1}$$

όπου, τα μηδενικά block συμπληρώνουν τον πίνακα S ώστε να προκύψει ένας $m \times n$ πίνακας. Ο πίνακας S είναι προσδιορισμένος με μοναδικό τρόπο (εκτός από τη σειρά των διαγώνιων στοιχείων του).

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $m \leq n$, αλλιώς ασχολούμαστε με τον πίνακα A^* αντί για τον A. Ο πίνακας A^*A ταυτίζεται με τον $\tilde{A}^*\tilde{A}$, όπου

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης n με $n-m$ μηδενικές γραμμές. Από την ιδιότητα 8 του θεωρήματος 2, ο A^*A είναι θετικά ημιορισμένος. Από την ιδιότητα 7 του ίδιου θεωρήματος, υπάρχει ένας μοναδιαίος πίνακας V και ένας διαγώνιος πίνακας D διάστασης n με μη-αρνητικά διαγώνια στοιχεία d_i ώστε $A^*A = VDV^*$.

Έτσι,

$$(AV)^*(AV) = D. \tag{2}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα πρώτα p διαγώνια στοιχεία του D (διάστασης n) είναι θετικά και τα υπόλοιπα είναι μηδέν, δηλαδή:

$$D = \begin{bmatrix} \tilde{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

όπου $\tilde{D} = diag(d_1, \cdots, d_p)$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Έστω $w_1, \cdots, w_p$ τα διανύσματα $d_i^{1/2}(AV)_i$, όπου $(AV)_i$ είναι η i-οστή στήλη του πίνακα AV, $i = 1, \cdots, p$. Αυτά τα m διανύσματα w_i είναι αμοιβαία ορθογώνια από τη σχέση (2) και καθένα από αυτά έχει μέτρο 1. Τώρα, γνωρίζουμε (από Gram-Schmidt ορθοκανονικοποίηση) ότι υπάρχουν διανύσματα $w_{p+1}, \cdots, w_m$ τέτοια ώστε ο $U = [w_1 w_2 \cdots w_m]$ να είναι ένας μοναδιαίος πίνακας (διάστασης m). Θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση

$$AV = U\widehat{D}, \tag{3}$$

όπου $\widehat{D} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας, $S = diag(\sqrt{d_1}, \cdots, \sqrt{d_p})$.
Η σχέση (3) ισχύει για τις πρώτες p στήλες του AV από τον ορισμό των $w_1, \cdots, w_p$. Αλλά οι άλλες στήλες του AV είναι μηδενικές, από τη σχέση (2), το μέτρο του διανύσματος $(AV)_i$ είναι ίσο με το i-οστό διαγώνιο στοιχείο του D για $i > p$ και έτσι είναι μηδέν.

Από τη σχέση (3) έπεται ότι $A = U\widehat{D}V^*$. Ξέρουμε όμως ότι $rankA = rank\widehat{D} = p$, δηλαδή $p = r$ και η σχέση (3) αποδείχθηκε.
Η μοναδικότητα του S έπεται από το γεγονός ότι τα διαγώνια στοιχεία του S είναι οι μη-αρνητικές τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του A^*A. $\square$

Θεώρημα 2. *(Θεμελιώδες Θεώρημα για Θετικά Ημιορισμένους Πίνακες - Fundamental Theorem on Positive Semidefinite Matrices)*
Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας ερμιτιανός πίνακας (ή $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας). Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Ο A είναι θετικά ημιορισμένος.*
2. *Ο πίνακας $A + \epsilon I$ είναι θετικά ορισμένος για κάθε $\epsilon > 0$.*
3. *Όλες οι ιδιοτιμές όλων των κύριων υποπινάκων του A είναι μη-αρνητικές.*
4. *Όλες οι κύριες υποορίζουσες του A είναι μη-αρνητικές.*
5. *Για $k = 1, \cdots, n$ τα αθροίσματα όλων των κύριων υποοριζουσών του A τάξης k είναι μη-αρνητικά.*
6. *Όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη-αρνητικές.*
7. *Υπάρχει ένας μοναδιαίος πίνακας U (ορθογώνιος πίνακας U, αν ο A είναι πραγματικός) και ένας διαγώνιος πίνακας D με μη-αρνητικά διαγώνια στοιχεία, τέτοιοι ώστε $A = UDU^*$.*
8. *Υπάρχει ένας τετραγωνικός πίνακας C, τέτοιος ώστε $A = CC^*$.*

Τα Θεωρήματα 1 και 2 μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο:

M. Fielder, Special Matrices and Their Applications in Numerical Mathematics, Second Edition, Dover, 2008.

Θεώρημα

Έστω $A = U\Sigma V^T$ η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών ενός $m \times n$ πίνακα A $(m \geq n)$. Έστω r η τάξη του πίνακα A.
Τότε,

1. $V^T (A^T A) V = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)_{n \times n}$
2. $U^T (AA^T) U = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)_{m \times m}$

Απόδειξη:

1. Ισχύει ότι:
$$\begin{aligned} A^T A &= (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) \\ &= V \Sigma^T \underbrace{U^T U}_{I} \Sigma V^T \\ &= V \Sigma^T \Sigma V^T \end{aligned}$$

όπου: ο $\Sigma^T \Sigma$ είναι $n \times n$ διαγώνιος πίνακας, με διαγώνια στοιχεία $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$.

Άρα,
$$V^T (A^T A) V = \Sigma^T \Sigma = diag(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)_{n \times n}$$

Ομοίως προκύπτει και το 2.

- Δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα $\longrightarrow$ ιδιοδιανύσματα του $A^T A$
- Αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα $\longrightarrow$ ιδιοδιανύσματα του AA^T
- $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$ $\longrightarrow$ μη μηδενικές ιδιοτιμές των $A^T A$ και AA^T

Παρατήρηση

- Έστω ότι ο πίνακας A είναι πραγματικός. Οι στήλες του πίνακα U της παραγοντοποίησης ιδιαζουσών τιμών του πίνακα A είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα AA^T και οι στήλες του πίνακα V είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A^TA. Τα στοιχεία του διαγώνιου πίνακα S είναι οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα A^TA.

- Όταν ο πίνακας A είναι συμμετρικός ($A = A^T$) τότε οι στήλες των πινάκων U, V είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A^2 και τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα S είναι η τετραγωνική ρίζα των ιδιοτιμών του πίνακα A^2. Όπως είναι γνωστό, τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A^2 είναι τα ίδια με αυτά του πίνακα A. Άρα, οι στήλες των U, V είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα S είναι το μέτρο των ιδιοτιμών του πίνακα A (αν οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές και η απόλυτη τιμή αν οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές).

- Στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος τότε πάλι οι στήλες των πινάκων U, V είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A^2 και τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα S είναι η τετραγωνική ρίζα των ιδιοτιμών του πίνακα A^2. Έτσι, οι πίνακες U, V είναι ίδιοι και οι στήλες τους είναι τα ιδιοδιανύσματα του A. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα S είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A (οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι θετικές αφού ο A είναι θετικά ορισμένος). Δηλαδή, όταν ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος τότε η παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών του πίνακα A ταυτίζεται με τη φασματική αναπαράσταση του A.

- <u>Η SVD και η δομή ενός πίνακα</u>

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ οι n ιδιάζουσες τιμές ενός $m \times n$ πίνακα A. $(m \geq n)$ Τότε:

1. $\|A\|_2 = \sigma_1 = \sigma_{max}$
2. $\|A\|_F = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)^{1/2}$
3. $\|A^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\sigma_n} = \dfrac{1}{\sigma_{min}}$, όπου ο A $n \times n$ μη ιδιάζων.
4. Αν A $n \times n$ μη ιδιάζων τότε
$$K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$$
5. $rank(A) = \#$ μη μηδενικών ιδιαζουσών τιμών

<u>Απόδειξη:</u>

1. $\|A\|_2 = \| U \Sigma V^T \|_2 = \| \Sigma \|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(\Sigma^T \Sigma)} = max(\sigma_i) = \sigma_{max}$
Η $\|\cdot\|_2$ είναι αναλλοίωτη σε ορθογώνιους μετασχηματισμούς.
2. $\|A\|_F = \| U \Sigma V^T \|_F = \| \Sigma \|_F = (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)^{1/2}$
Η $\|\cdot\|_F$ είναι αναλλοίωτη σε ορθογώνιους μετασχηματισμούς.
3. Αν πάρουμε την SVD του A^{-1},
η μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή του A^{-1} είναι $\dfrac{1}{\sigma_n}$.

Άρα, από (1) ισχύει: $\|A^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\sigma_n}$

4. Ισχύει: $K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sigma_1 \cdot \dfrac{1}{\sigma_n} = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_n} = \dfrac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$
5. $rank(A) = rank(U \Sigma V^T) = rank(\Sigma)$
Ο διαγώνιος πίνακας Σ έχει τάξη ίση με τον αριθμό των μη μηδενικών διαγώνιων στοιχείων.

- <u>Προσδιορισμός ορθοκανονικών βάσεων</u>

Έστω $A = U\Sigma V^T$ η SVD ενός $m \times n$ πίνακα A και $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ οι θετικές ιδιάζουσες τιμές του A.

Θέτουμε $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$
$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$

Από το βασικό θεώρημα της SVD έχουμε:

$$A v_i = \sigma_i u_i \ , \quad i = 1, \dots, r$$
$$A v_i = 0 \ , \quad i = r+1, \dots, n$$

Ομοίως, παίρνοντας την SVD του $A^T = V\Sigma U^T$ προκύπτει:

$$A^T u_i = \sigma_i v_i \ , \quad i = 1, \dots, r$$
$$A^T u_i = 0 \ , \quad i = r+1, \dots, m$$

<u>Συμβολισμός</u>

$R(A) \rightarrow$ χώρος στηλών (range) του A
$N(A) \rightarrow$ πυρήνας (null space) του A

- $R(A) = \text{span}\{u_1, \dots, u_r\} \xrightarrow{\text{Βάση}}$ οι στήλες του U που αντιστοιχούν σε $\sigma_i \neq 0$
- $N(A) = \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\} \xrightarrow{\text{Βάση}}$ οι στήλες του V που αντιστοιχούν σε $\sigma_i = 0$.
- $R(A^T) = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$
- $N(A^T) = \text{span}\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$

- Reduced SVD

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $(m \geq n)$.
Ο A μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A = U_1 \Sigma_1 V^T$$

όπου:

U_1 $m \times n$ ορθοκανονικός (orthonormal) πίνακας

Σ_1 $n \times n$ διαγώνιος πίνακας

V $n \times n$ ορθογώνιος πίνακας.

Αριθμητικά Παραδείγματα

Στα παρακάτω παραδείγματα θα δούμε ποια είναι η παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών για τρεις κατηγορίες πινάκων. Η πρώτη είναι ο πίνακας να είναι τυχαίος, η δεύτερη να είναι συμμετρικός και η τρίτη να είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Παράδειγμα 1 - *Τυχαίος πίνακας*
Έστω ο 8×7 πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0.8147 & 0.9575 & 0.4218 & 0.6787 & 0.2769 & 0.4387 & 0.7094 \\ 0.9058 & 0.9649 & 0.9157 & 0.7577 & 0.0462 & 0.3816 & 0.7547 \\ 0.1270 & 0.1576 & 0.7922 & 0.7431 & 0.0971 & 0.7655 & 0.2760 \\ 0.9134 & 0.9706 & 0.9595 & 0.3922 & 0.8235 & 0.7952 & 0.6797 \\ 0.6324 & 0.9572 & 0.6557 & 0.6555 & 0.6948 & 0.1869 & 0.6551 \\ 0.0975 & 0.4854 & 0.0357 & 0.1712 & 0.3171 & 0.4898 & 0.1626 \\ 0.2785 & 0.8003 & 0.8491 & 0.7060 & 0.9502 & 0.4456 & 0.1190 \\ 0.5469 & 0.1419 & 0.9340 & 0.0318 & 0.0344 & 0.6463 & 0.4984 \end{bmatrix}$$

Η παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών του πίνακα A δίνεται από τη σχέση

$$A = U \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*$$

όπου οι πίνακες U, S, V περιγράφονται παρακάτω.

Οι στήλες του πίνακα U είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα AA^T, δηλαδή ο 8×8 πίνακας

$$U = \begin{bmatrix} -0.3796 & 0.1421 & 0.4150 & 0.1665 & -0.3813 & 0.1440 & 0.4624 & 0.5058 \\ -0.4321 & -0.1647 & 0.4728 & 0.3274 & 0.2142 & -0.5423 & -0.2010 & -0.2741 \\ -0.2557 & -0.4823 & -0.4239 & 0.5619 & -0.2189 & 0.3166 & 0.0847 & -0.2263 \\ -0.4835 & 0.0310 & -0.0946 & -0.5848 & -0.1034 & 0.0273 & 0.3641 & -0.5200 \\ -0.3910 & 0.3691 & 0.1103 & 0.0422 & 0.2993 & 0.6268 & -0.4620 & -0.0321 \\ -0.1475 & 0.1650 & -0.1507 & -0.1044 & -0.7373 & -0.2216 & -0.5691 & 0.0284 \\ -0.3618 & 0.3447 & -0.6167 & 0.1144 & 0.3020 & -0.3755 & 0.1077 & 0.3362 \\ -0.2539 & -0.6609 & -0.0214 & -0.4261 & 0.1602 & 0.0352 & -0.2392 & 0.4823 \end{bmatrix}$$

Οι στήλες του πίνακα V είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A^TA, δηλαδή ο 7×7 πίνακας

$$V = \begin{bmatrix} -0.3852 & -0.0745 & 0.4922 & -0.2954 & 0.0921 & -0.0916 & 0.7069 \\ -0.4737 & 0.4942 & 0.2281 & 0.0236 & -0.1845 & -0.5334 & -0.4002 \\ -0.4661 & -0.4702 & -0.2922 & -0.0312 & 0.6226 & -0.1984 & -0.2199 \\ -0.3470 & 0.1066 & -0.1008 & 0.8600 & -0.0211 & 0.1989 & 0.2803 \\ -0.2802 & 0.5641 & -0.5344 & -0.3782 & 0.1186 & 0.3701 & 0.1534 \\ -0.3177 & -0.4240 & -0.3750 & -0.1435 & -0.7400 & -0.0742 & 0.0702 \\ -0.3319 & -0.1405 & 0.4288 & -0.0895 & -0.0876 & 0.6969 & -0.4299 \end{bmatrix}$$

Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα S είναι η τετραγωνική ρίζα των ιδιοτιμών του πίνακα A^TA, δηλαδή ο 7×7 πίνακας

$$S = \begin{bmatrix} 4.3515 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1059 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0110 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7284 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5439 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1266 \end{bmatrix}$$

και ο 8×7 πίνακας $\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 4.3515 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1059 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0110 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7284 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5439 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1266 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2 - *Συμμετρικός πίνακας*
Έστω ο 8×8 συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 3 & 7 & 8 & 5 & 9 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 6 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 11 & 9 & 4 & 3 & 10 & 20 & 5 \\ 6 & 12 & 1 & 5 & 10 & 9 & 7 & 5 \\ 7 & 13 & 0 & 4 & 20 & 7 & 21 & 23 \\ 8 & 14 & 2 & 5 & 5 & 5 & 23 & 3 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι -19.6430, -12.5321, -3.8020, 0.2064, 3.5197, 6.8262, 15.1917, 66.2332.

Η παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών του πίνακα A δίνεται από τη σχέση

$$A = U \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*$$

όπου οι πίνακες U, S, V περιγράφονται παρακάτω.

Οι στήλες του πίνακα U είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα AA^T, δηλαδή ο 8×8 πίνακας

$$U = \begin{bmatrix} -0.2004 & -0.1501 & -0.0361 & 0.3417 & 0.0731 & 0.0691 & 0.1121 & -0.8925 \\ -0.3971 & -0.2699 & -0.2271 & 0.5859 & 0.1136 & 0.4158 & 0.1020 & 0.4224 \\ -0.1540 & -0.1325 & -0.6096 & -0.3346 & -0.6176 & 0.2235 & -0.1823 & -0.1028 \\ -0.2075 & 0.0243 & -0.4068 & -0.1164 & 0.1050 & -0.5149 & 0.7043 & 0.0716 \\ -0.3831 & 0.5198 & -0.0972 & 0.3576 & -0.1559 & -0.4671 & -0.4496 & 0.0340 \\ -0.2983 & -0.0242 & -0.2812 & -0.4089 & 0.7220 & 0.0714 & -0.3670 & -0.0556 \\ -0.5826 & -0.4891 & 0.5080 & -0.2466 & -0.1979 & -0.2394 & -0.0534 & 0.0567 \\ -0.4003 & 0.6136 & 0.2519 & -0.2419 & -0.0670 & 0.4761 & 0.3289 & -0.0435 \end{bmatrix}$$

Οι στήλες του πίνακα V είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A^T A$, δηλαδή ο 8×8 πίνακας

$$V = \begin{bmatrix} -0.2004 & 0.1501 & -0.0361 & -0.3417 & 0.0731 & -0.0691 & 0.1121 & -0.8925 \\ -0.3971 & 0.2699 & -0.2271 & -0.5859 & 0.1136 & -0.4158 & 0.1020 & 0.4224 \\ -0.1540 & 0.1325 & -0.6096 & 0.3346 & -0.6176 & -0.2235 & -0.1823 & -0.1028 \\ -0.2075 & -0.0243 & -0.4068 & 0.1164 & 0.1050 & 0.5149 & 0.7043 & 0.0716 \\ -0.3831 & -0.5198 & -0.0972 & -0.3576 & -0.1559 & 0.4671 & -0.4496 & 0.0340 \\ -0.2983 & 0.0242 & -0.2812 & 0.4089 & 0.7220 & -0.0714 & -0.3670 & -0.0556 \\ -0.5826 & 0.4891 & 0.5080 & 0.2466 & -0.1979 & 0.2394 & -0.0534 & 0.0567 \\ -0.4003 & -0.6136 & 0.2519 & 0.2419 & -0.0670 & -0.4761 & 0.3289 & -0.0435 \end{bmatrix}$$

Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα S είναι η τετραγωνική ρίζα των ιδιοτιμών του πίνακα $A^T A$, δηλαδή ο 8×8 πίνακας

$$S = \begin{bmatrix} 66.2332 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19.6430 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15.1917 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.5321 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.8262 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.8020 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5197 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2064 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα S είναι η απόλυτη τιμή των ιδιοτιμών του A και οι πίνακες U, V είναι οι ίδιοι.

Παράδειγμα 3 - *Συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας*
Έστω ο συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας

$$A = \frac{1}{11}\left[\begin{array}{ccccccc} 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 9 & 18 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 \\ 8 & 16 & 24 & 21 & 18 & 15 & 12 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 24 & 20 & 16 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 25 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 24 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 \end{array}\right]$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι 0.2611, 0.2984, 0.3782, 0.5459, 0.9482, 2.2509, 10.5899.

Η παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών του πίνακα A δίνεται από τη σχέση

$$A = U\left[\begin{array}{cc} S & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]V^*$$

όπου οι πίνακες U, S, V περιγράφονται παρακάτω.

Οι στήλες του πίνακα U είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα AA^T, δηλαδή ο 7×7 πίνακας

$$U = \left[\begin{array}{ccccccc} -0.1420 & -0.3132 & 0.4475 & -0.5094 & 0.4855 & -0.3787 & -0.2071 \\ -0.2707 & -0.4872 & 0.4230 & -0.0856 & -0.3126 & 0.5115 & 0.3791 \\ -0.3737 & -0.4448 & -0.0475 & 0.4950 & -0.2842 & -0.3122 & -0.4868 \\ -0.4415 & -0.2048 & -0.4680 & 0.1689 & 0.4956 & -0.0899 & 0.5118 \\ -0.4676 & 0.1262 & -0.3949 & -0.4666 & -0.0348 & 0.4336 & -0.4501 \\ -0.4495 & 0.4012 & 0.0946 & -0.2473 & -0.4731 & -0.4957 & 0.3119 \\ -0.3890 & 0.4979 & 0.4844 & 0.4251 & 0.3394 & 0.2360 & -0.1209 \end{array}\right]$$

Οι στήλες του πίνακα V είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A^TA, δηλαδή ο 7×7 πίνακας

$$V = \left[\begin{array}{ccccccc} -0.1420 & -0.3132 & 0.4475 & -0.5094 & 0.4855 & -0.3787 & -0.2071 \\ -0.2707 & -0.4872 & 0.4230 & -0.0856 & -0.3126 & 0.5115 & 0.3791 \\ -0.3737 & -0.4448 & -0.0475 & 0.4950 & -0.2842 & -0.3122 & -0.4868 \\ -0.4415 & -0.2048 & -0.4680 & 0.1689 & 0.4956 & -0.0899 & 0.5118 \\ -0.4676 & 0.1262 & -0.3949 & -0.4666 & -0.0348 & 0.4336 & -0.4501 \\ -0.4495 & 0.4012 & 0.0946 & -0.2473 & -0.4731 & -0.4957 & 0.3119 \\ -0.3890 & 0.4979 & 0.4844 & 0.4251 & 0.3394 & 0.2360 & -0.1209 \end{array}\right]$$

Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα S είναι η τετραγωνική ρίζα των ιδιοτιμών του πίνακα $A^T A$, δηλαδή ο 7×7 πίνακας

$$S = \begin{bmatrix} 10.5899 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2509 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9482 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5459 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3782 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2984 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2611 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα S είναι οι ιδιοτιμές του A και οι πίνακες U, V είναι οι ίδιοι.

Ασκήσεις για εξάσκηση με τη Julia

1. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 7.999 \end{bmatrix}$.
Να βρεθούν οι νόρμες $\| A \|_2$, $\| A \|_F$ και ο δείκτης κατάστασης του A.

2. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.
Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση για το null space του A και για το range του A.

3. Να θεωρήσετε έναν τυχαίο συμμετρικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ και να υπολογίσετε τις νόρμες $\| A \|_2$, $\| A \|_F$ και τον δείκτη κατάστασης του A