Ανάλυση - Πιθανότητες   1η Διάλεξη 2/12/2020

Πληροφορία και σ-άλγεβρα

Πώς επιδρά η πληροφορία στη διαμόρφωση του δειγμ. χώρου (δ.χ.) ενός πειράματος τύχης (π.τ.)

Παράδειγμα Η ρίψη 3 δικαίων και ανεξάρτητων νομισμάτων.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i = \text{αποτέλ. του } i\text{-νομίσματος}\}$$

$$= \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$$

Επίπεδο Πληροφόρησης

Μηδενική Πληροφόρηση Ω, $\emptyset$

→ Γνωρίζουμε το αποτέλεσμα της ρίψης του 1ου νομίσματος

Θεωρώ τα εξής σύνολα

A_K = το 1ο νόμισμα έφερε K
$= \{KKK, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, KK\Gamma\}$

A_Γ = το 1ο νόμισμα έφερε Γ
$= \{\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma KK, \Gamma\Gamma K\}$

Τότε οι δυνατοί δ.χ. του π.τ. (που επιδρά το επίπεδο πληροφορ.) μπορούν να είναι $\Omega, \emptyset, A_K, A_\Gamma$.

Έστω ότι γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του ρίψης του 1ου και 2ου νομίσματος

$A_{kk} = \{kkk, kkr\}$

$A_{kr} = \{krr, krk\}$

$A_{rk} = \{rkk, rkr\}$

$A_{rr} = \{rrr, rrk\}$

A_k $\quad \Omega, \phi$ $\quad A_r$.

$A_{kk} \subset A_k$

Σύνολα πληροφόρησης $\{ \phi, \Omega, A_k, A_r, A_{kk}, A_{kr}, A_{rk}, A_{rr} \}$

Θεωρώ τα σύνολα

Έστω ότι γνωρίζουμε τα αποτελέσματα των ρίψεων και των τριών νομισμάτων

πλήρης πληροφόρηση

$A_{kkk} = \{kkk\}$

$A_{kkr} = \{kkr\}$

$A_{krr} = \{krr\}$

$A_{krk} = \{krk\}$

$A_{rrr} = \{rrr\}$

$A_{rrk} = \{rrk\}$

$A_{rkk} = \{rkk\}$

$A_{rkr} = \{rkr\}$

A_{kk}. $\quad A_{kr}$ $\quad A_{rk}$ $\quad A_{rr}$.

A_k $\quad A_r$

Φ, Ω.

Παράδειγμα 2 Κίνηση επιτοκίων για μία περίοδο

3 δυνατές καταστάσεις

$U = up$

$N = neutral$ $\Rightarrow \Omega = \{U, N, D\}$

$D = down$

Περίπτωση

Τι μου δίνει η συγκεκριμένη γνώση;

Σύνολα Πληροφόρησης

ϕ, Ω

1. Δεν έχω καμμία πληροφόρηση $\quad P(\Phi) = 0, \; P(\Omega) = 1.$

2. Αν γνωρίζω $P(\{N\}) = 1/2$ $\quad P(\{U,D\}) = 1 - P(N) = 1/2$ $\quad \{\{N\}, \{U,D\}, \phi, \Omega\}$

3. Έστω ότι επιπλέον γνωρίζω ότι $P(\{U\}) = \frac{1}{3}$

$P(\{N\}) = \frac{1}{2}$

Τι μας δίνει αυτή η πληροφορία;

$P(\{D\}) = 1 - P(\{U\}) - P(\{N\}) = \frac{1}{6}$

$P(\{U,N\}) = P(\{U\}) + P(\{N\}) = \frac{5}{6}$

$P(\{N,D\}) = 1 - P(\{U\}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Σύνολο πληροφόρησης

$\{\emptyset, \{U\}, \{N\}, \{D\}, \{U,N\}, \{U,D\}, \{N,D\}, \Omega\}$

Γενικά η έννοια της πληροφορίας με την αποτύπωση μιας ειδικής συλλογής υποσυνόλων του δ.χ. Ω του π.π. το χώρο

Τα στοιχεία του Ω μπορούν να θεωρηθούν ως οι καταστάσεις του κόσμου ή οι πιθανές εκβάσεις του π.τ. και η πληροφορία χωρίζει το δ.χ. σε σύνολα πληροφόρησης $\longrightarrow$ σ-άλγεβρα

Συμβολισμός $\mathcal{P}(\Omega) \equiv \{A \mid A \subseteq \Omega\}$ Δυναμοσύνολο του Ω.

περιέχει όλα τα δυνατά υποσύνολα του Ω

Ορισμός σ-άλγεβρας Έστω $\Omega \neq \emptyset$. Μία οικογένεια (συλλογή) $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω, δηλ. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ καλείται σ-άλγεβρα στο Ω όταν ισχύουν τα εξής:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ (ii) $A^c \in \mathcal{F}$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$.

κλειστότητα ως προς τα συμπληρώματα κ.λ.π.

(iii) για κάθε ακολουθία $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, τότε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

κλειστότητα ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις

Ερμηνεία Μία σ-άλγεβρα αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο πληροφόρησης. Στη κίνηση επιτοκίων $\Omega = \{U, N, D\}$

Η συλλογή $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{N\}, \{U,D\}\}$ αντιστοιχεί

στο επίπεδο πληροφόρησης $P(\{N\}) = \frac{1}{2}$

Είναι σ-άλγεβρα η $\mathcal{F}$; (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$. ✓

(ii) $\emptyset^c = \Omega \in \mathcal{F}$, $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{F}$, $\{N\}^c = \{U,D\} \in \mathcal{F}$, $\{U,D\}^c = \{N\} \in \mathcal{F}$ ✓

(iii) Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί ενώσεων από στοιχεία της $\mathcal{F}$ $\in \mathcal{F}$.

$\emptyset \cup \{N\} = \{N\} \in \mathcal{F}$, $\emptyset \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{F}$, ...

$\Omega \cup \{N\} = \Omega$, $\Omega \cup \{U,D\} = \Omega \in \mathcal{F}$

$\{N\} \cup \{U,D\} = \Omega \in \mathcal{F}$.

οι ενώσεις των δύο δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$ $\in \mathcal{F}$

$\emptyset \cup \Omega \cup \{N\} = \Omega$, $\emptyset \cup \Omega \cup \{U,D\} = \Omega$, $\Omega \cup \{U,D\} \cup \{N\} = \Omega$

$\emptyset \cup \{N\} \cup \{U,D\} = \Omega$

οι ενώσεις των ανά τριών στοιχείων της $\mathcal{F}$ $\in \mathcal{F}$.

$\emptyset \cup \Omega \cup \{N\} \cup \{U,D\} = \Omega \in \mathcal{F}$ ✓

Άρα η $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{N\}, \{U,D\}\}$ σ-άλγεβρα

συνδέεται με την πληροφορία $P(\{N\}) = \frac{1}{2}$

Συνέπειες: Έστω $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα στο Ω τότε

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$ (γιατί $\emptyset^c = \Omega \in \mathcal{F}$)

Παρατήρηση: κάθε σ-άλγεβρα περιέχει υποχρεωτικά το $\emptyset$, Ω

(ii) για κάθε ακολουθία $A_i \in \mathcal{F}$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$

γιατί $A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_n^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{F}$.

κανόνες De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Παρατηρήσεις: 1. Για $\Omega \neq \emptyset$, οι συλλογές

$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ είναι σ-άλγεβρες

μηδενική πληροφορία / πλήρης πληροφορία

και μάλιστα αυτές είναι η ελάχιστη και η μέγιστη σ-άλγεβρα στο Ω

2. Η $\mathcal{F}$ καλείται άλγεβρα στο Ω αν η (iii) του ορισμού αλλάξει στην εξής συνθήκη $A \cup B \in \mathcal{F}$ για κάθε $A, B \in \mathcal{F}$

Οι άλλες ιδιότητες παραμένουν ίδιες.

Αν $\mathcal{F}$ άλγεβρα τότε $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{F}$

και για κάθε $A, B \in \mathcal{F}$ θα ισχύει $A \cap B = (\underbrace{A^c}_{\in\mathcal{F}} \cup \underbrace{B^c}_{\in\mathcal{F}})^c \in \mathcal{F}$

Με επαγωγή μπορώ να $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$ και $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$ πεπερασμένες ενώσεις + τομές

για κάθε ακολουθία $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$.

3. Αν η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα στο $\Omega \Rightarrow \mathcal{F}$ είναι άλγεβρα στο Ω.

κανονικά. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλ. μια $\mathcal{F}$ άλγεβρα δεν είναι και απαραίτητα σ-άλγεβρα

Αντιπαράδειγμα $\Omega = \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{F} = \{ A \in \mathbb{N} : A$ πεπερασμένο ή $\mathbb{N} - A$ πεπερ.$\}$

Επίσης, αν Ω πεπερασμένο και η $\mathcal{F}$ άλγεβρα $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα.

4. Αν $A, B \in \mathcal{F}$ και $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα τότε $A-B, B-A, (A-B) \cup (B-A) \in \mathcal{F}$

5. Στο παράδειγμα με τα επιτόκια η συλλογή

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{N\}, \{D\}, \{N,D\}, \Omega\} \quad \text{με} \quad \Omega = \{U, N, D\}$$

δεν είναι σ-άλγεβρα

γιατί: $\{D\}^c = \{U, N\} \notin \mathcal{F}$ παραβιάζεται το (ii) του ορισμού.

$X = \{ \emptyset, \Omega, \{N\}, \{D\}, \{N,D\} \}$ $\leftarrow$ δεν είναι σ-άλγεβρα.

$\{N,D\}^c = \{U\}$ $\quad \Omega$ σ-αλγ.

$\Rightarrow \quad \tilde{X} = \{\emptyset, \Omega, \{N\}, \{D\}, \{N,D\}, \{U\}, \{N,U\}, \{D,U\}, \{N,D,U\}\} = \sigma(\mathcal{F})$

Παραγόμενη σ-άλγεβρα

Έστω μια συλλογή $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (υποσύνολα του Ω) που δεν είναι σ-άλγεβρα.

Θεωρώ τις σ-άλγεβρες $\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \{\mathcal{F}$ σ-αλγ. του $\Omega \mid \mathcal{F} \supseteq \mathcal{X}\}$

Η παραγόμενη σ-άλγεβρα από την συλλογή $\mathcal{X}$ είναι η

$$\sigma(\mathcal{X}) = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})} \mathcal{F}$$

είναι σ-άλγεβρα και μάλιστα η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει το $\mathcal{X}$

Κατασκευή της $\sigma(\mathcal{X})$ από διαμέριση του Ω

Έστω η συλλογή $\mathcal{X} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ όπου $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Omega$

Διαμέριση του Ω δηλ. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ και είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους.

δηλ. $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$

Η $\mathcal{X}$ δεν είναι σ-άλγεβρα γιατί $A_k^c = \{A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots A_n\} \notin \mathcal{X}$.

Η παραγόμενη σ-άλγεβρα από την $\mathcal{X}$

" $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

$\sigma(\mathcal{X}) = \{\emptyset, \Omega, A_1, \dots, A_n,$ όλες τις δυνατές ενώσεις ανά δύο $A_i \cup A_j,\ i \neq j,$

όλες τις δυνατές ενώσεις ανά τρία $A_i \cup A_j \cup A_k,\ i \neq j \neq k,$

" " " " ανά τέσσερα

⋮

" " " " ανά $n-1$. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}$

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-2} \cup A_n$

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-3} \cup A_{n-2} \cup A_n$

⋮

$A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$

Παράδειγμα $\Omega = \{1, \dots, 10\}$ $\mathcal{X} = \{B_1, B_2, B_3\}$

$B_1 = \{1, 2, 3\}$ $B_2 = \{4, 5, 6\}$, $B_3 = \{7, 8, 9, 10\}$ διαμέριση του Ω.

$\sigma(\mathcal{X}) = \{\phi, \Omega, B_1, B_2, B_3, B_1 \cup B_2, B_2 \cup B_3, B_1 \cup B_3\}$, $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$