Ανάλυση Πιθανοτήτων   Διάλεξη 2:   16/12/2020

- Έννοια σ-αλγέβρας
- Έννοια μέτρου και βασικές ιδιότητες
- Τα σύνολα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$.
- Λήμμα Borel-Cantelli

Ορισμός σ-αλγέβρας

Έστω $\Omega \neq \emptyset$ και μια συλλογή $\mathcal{F}$ από υποσύνολα του Ω ($\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$)

Η $\mathcal{F}$ καλείται σ-άλγεβρα αν ισχύουν τα εξής:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $A^c \in \mathcal{F}$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ για κάθε ακολουθία $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ κλειστότητα αριθμήσιμη ένωση

Βασικές Ιδιότητες

Έστω $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα

1) $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ για κάθε ακολουθία $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$.

3) η $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα και άρα $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ για κάθε $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$

Παρατηρήσεις

Κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ περιέχει την $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}$ (μικρότερη σ-άλγ. ⇒ μηδενική πληροφόρηση)

4) Τότε κάθε $A, B \in \mathcal{F}$ ισχύει ότι $A - B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$ μόνο το A

$B - A = B \cap A^c \in \mathcal{F}$ μόνο το B.

$$(A-B) \cup (B-A) \in \mathcal{F}$$

Κάθε σ-άλγεβρα αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο πληροφορίας

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \longrightarrow$ μηδενική πληροφορία

$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow$ πλήρη "

$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$.

Παραγόμενη σ-άλγεβρα

Τι γίνεται αν η $\mathcal{F}$ δεν είναι σ-άλγεβρα.

Έστω η συλλογή $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ που δεν είναι σ-άλγεβρα

Θεωρώ όλες τις δυνατές σ-άλγεβρες που την περιέχουν $\mathcal{X}$.

ορίζω την οικογένεια σ-αλγεβρών

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \{\mathcal{F} \text{ σ-άλγεβρα} : \mathcal{F} \supset \mathcal{X}\}$$

Τότε μπορώ να ορίσω την $\sigma(\mathcal{X}) = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})} \mathcal{F}$ ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{X}$

Η $\sigma(\mathcal{X})$ καλείται παραγόμενη σ-άλγεβρα από τη συλλογή $\mathcal{X}$.

Κατασκευή $\sigma(\mathcal{X})$ από διαμέριση του Ω

Έστω $A_1, A_2, \dots A_n$ διαμέριση του Ω, δηλ. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ και A_i ξένα ανά δύο δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$.

Θεωρώ τη συλλογή $\mathcal{X} = \{A_1, A_2, \dots A_n\}$ δεν είναι σ-άλγεβρα.

$\sigma(\mathcal{X}) = \{\emptyset, A_1, A_2, \dots, A_n,$ όλες τις δυνατές ενώσεις με δύο σύνολα,

" " " " με τρία ", ...

...... " " " " με $n-1$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega\}$

Παράδειγμα Ρίχνω ένα νόμισμα 3 φορές. Ανεξάρτητες ρίψεις.

Όταν φέρω Γ κερδίζω 2€, και όταν φέρω Κ χάνω 1€

Ο δ.χ. του π.π. είναι $\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, \dots, ΓΓΓ\}$ $(|\Omega| = 2^3 = 8)$

και να θεωρήσω τα ενδεχόμενα που περιγράφουν το δυνατό κέρδος

$B_0 = \{ΚΚΚ\} \to$ κέρδος -3 $\quad B_2 = \{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ\} \to$ κέρδος 3

$B_1 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\} \to$ " 0 $\quad B_3 = \{ΓΓΓ\} \to$ κέρδος 6.

Τα B_0, B_1, B_2, B_3 είναι μία διαμέριση του Ω. και έστω $\mathcal{X} = \{B_0, B_1, B_2, B_3\}$

Τότε είναι η $\sigma(\mathcal{X}) = \{\emptyset, B_0, B_1, B_2, B_3, B_0 \cup B_1, B_1 \cup B_2, B_2 \cup B_3, B_0 \cup B_2,$

$B_0 \cup B_3, B_1 \cup B_3, B_0 \cup B_1 \cup B_2, B_0 \cup B_2 \cup B_3, B_1 \cup B_2 \cup B_3,$

$B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega\}$.

Σύνολα Borel

$\Omega = \mathbb{R}$ και $\mathcal{A} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ δεν είναι σ-άλγεβρα

$(-\infty, a]^c = (a, +\infty) \notin \mathcal{A}$.

$\Downarrow$ $\sigma(\mathcal{A})$ καλείται σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Συμβολισμός $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{A})$

Τα στοιχεία της $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ λέγονται σύνολα Borel ή Borel.

Αποδεικνύεται ότι όλα τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι Borel όπως

και τα $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, κα.

Για να δούμε κάποια: Έχω ότι $(-\infty, a] \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

και για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχω $(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-\infty, a - \frac{1}{n}]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

για κάθε $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ έχω

$a-1 \quad a-\frac{1}{2} \quad a$

$$[a, b] = \underbrace{(-\infty, b]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \setminus \underbrace{(-\infty, a)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \tfrac{1}{n}, b - \tfrac{1}{n}] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$(a, b] = (-\infty, b] \setminus \overset{\mathcal{B}(\mathbb{R})}{(-\infty, a]} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\{a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a - \tfrac{1}{n}, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

$\mathcal{B}^{\cap}(\mathbb{R})$

Επίσης μπορώ να ορίσω τα Borel και από τη συλλογή των ανοικτών διαστημάτων

J = συλλογή των ανοικτών διαστημάτων

ή $J = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ ή $J = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a<b\}$

οπότε $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(J)$

<u>Θεώρημα</u> Αν $\mathcal{F}$ η συλλογή των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και $A_1 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$, $A_2 = \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}, a<b\}$
$A_3 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}$ με $a<b\}$ τότε

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(A_1) = \sigma(A_2) = \sigma(A_3)$$

Τι πρέπει να αποδείξω ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(A_3) \subseteq \sigma(A_2) \subseteq \sigma(A_1) \subseteq \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

<u>Ανεξάρτητες Ρίψεις Δίκαιου Νομίσματος Άπειρες Φορές</u>

<u>Π.χ.</u> Ρίχνω ένα δίκαιο νόμισμα άπειρες φορές.

ο δ.χ. $\Omega = \{$"λέξεις" άπειρου μήκους από κ και γ$\} = \{κκγκγγκ\ldots\}$

$= \{\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\ldots \quad \omega_i \in \{κ, γ\}\}$

Θεωρώ τις παρακάτω σ-άλγεβρες:

<u>Μηδενική Πληροφόρηση</u> $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

<u>Πληροφόρηση 1ης ρίψης</u> $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, A_κ, A_γ\}$ όπου $A_κ$ = το σύνολο όλων των

διαμέριση του Ω

A_k : το σύνολο όλων των λέξεων που ξεκινάνε από k

$= \{\omega \in \Omega : \omega_1 = k\} = \{kk\Gamma\Gamma k\Gamma\dots,\ k\Gamma k\Gamma k\Gamma\dots,\ kkkkk\dots\}$

$A_\Gamma : \{\omega \in \Omega : \omega_1 = \Gamma\}$

$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 = \sigma(\{A_k, A_\Gamma\})$

Πληροφόρηση των 2 πρώτων ρίψεων $\mathcal{F}_2 = \sigma(\{A_{kk}, A_{k\Gamma}, A_{\Gamma k}, A_{\Gamma\Gamma}\})$

διαμέριση του Ω

$A_{kk} = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = \omega_2 = k\}$

$A_{k\Gamma} = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = k, \omega_2 = \Gamma\}$

$A_{\Gamma k} = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = \Gamma, \omega_2 = k\}$

$A_{\Gamma\Gamma} = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = \omega_2 = \Gamma\}$

$A_k = A_{kk} \cup A_{k\Gamma} \in \mathcal{F}_2$

$A_\Gamma = A_{\Gamma k} \cup A_{\Gamma\Gamma} \in \mathcal{F}_2$

$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$

⋮

Πληροφόρηση των n πρώτων ρίψεων $\mathcal{F}_n = \sigma(\{A_{\omega_1\omega_2\dots\omega_n} : \omega_i \in \{k,\Gamma\}\})$

διαμέριση του Ω ← $A_{\omega_1\omega_2\omega_3\dots\omega_n} = \{$ "λέξεις" άπειρου μήκους που ξεκινάνε από $\omega_1\omega_2\dots\omega_n$, $\omega_i \in \{k,\Gamma\}\}$

Έχουμε κατασκευάσει μία ακολουθία από σ-άλγεβρες

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \dots$$

Είναι αύξουσα ακολουθία με $|\mathcal{F}_n| = 2^{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεωρώ τη συλλογή $\mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$ και $A \in \mathcal{A}$ αν $\exists n \in \mathbb{N} : A \in \mathcal{F}_n$

άρα το A : να είναι προσδιορισμένο σε ένα πεπερασμένο πλήθος πρώτων ρίψεων με γνωστά αποτελέσματα.

Η $\mathcal{A}$ δεν είναι σ-άλγεβρα. γιατί αν $A_1 = A_k$, $A_2 = A_{kk}$, $A_3 = A_{kkk}\dots$

Τότε $A_1 \in \mathcal{F}_1$, $A_2 \in \mathcal{F}_2$, $A_3 \in \mathcal{F}_3 \ldots\ldots A_n \in \mathcal{F}_n$ και $\mathcal{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$

άρα $A_1 \in \mathcal{X}$, $A_2 \in \mathcal{X}, \ldots$ $A_n \in \mathcal{X}, \ldots$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \{kkk\ldots\} \notin \mathcal{X}$ λέξεις απείρου μήκους όπου όλα είναι k.

Ορίζω ως $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\mathcal{X})$.

Μέτρο και Μετρήσιμα Σύνολα

Ορισμός Μέτρου

Έστω $\Omega \neq \emptyset$ σύνολο και $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα στον Ω

. Ένα μέτρο μ στον Ω είναι μία συνάρτηση $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ τέτοια ώστε:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) για κάθε ακολουθία $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ ξένων ανά δύο να ισχύει $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (σ-προσθετικότητα)

Η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ καλείται χώρος μέτρου (χ.μ.)

Το μ καλείται μέτρο στον Ω

και τα $A \in \mathcal{F}$ καλούνται μ-μετρήσιμα σύνολα

Αν επιπλέον $\mu(\Omega) = 1$ τότε το μ καλείται μέτρο πιθανότητας.

συμβ. με $P := \mu$, η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και είναι

χώρος πιθανότητας (χ.π.) και τα $A \in \mathcal{F}$ καλούνται ενδεχόμενα

Διάφορα γνωστά μέτρα

1) **Απαριθμητικό Μέτρο:** Έστω $A \in \mathcal{F}$ ορίζω την $\mu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$

με $\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{αν } A \text{ πεπερασμένο} \\ \infty & \text{αν } A \text{ απειροσύνολο.} \end{cases}$ για $A \in \mathcal{F}$.

2) **Μέτρο Dirac** Έστω $A \in \mathcal{F}$ και $\omega_0 \in \Omega$.

Ορίζω το $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \omega_0 \in A \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

3) **Μέτρο Lebesgue** $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Borel)

Έστω $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Borel σύνολο)

Ορίζω το μέτρο $\lambda(I) =$ μήκος του I

$$\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = \lambda((a,b]) = \lambda([a,b)) = b-a.$$

$$\lambda((-\infty,b]) = \lambda((-\infty,b)) = \lambda((a,+\infty)) = \lambda([a,+\infty)) = \infty$$

$$\lambda(\{a\}) = 0.$$

Βασικές Ιδιότητες

Έστω μ μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{F})$

1) σ-υποπροσθετικότητα

Αν $A_1, A_2, \ldots$ όχι κατ' ανάγκη ξένα μεταξύ τους τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(Η ισότητα ισχύει για ξένα ανά δύο σύνολα.)

2) Αν $A, B \in \mathcal{F}$ και $A \subseteq B$ τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$

3) Αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ αύξουσα ακολουθία $\mathcal{F}$-μετρήσιμων.

τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$

4) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. $(P(\Omega) = 1)$.

Έστω $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ φθίνουσα ακολουθία ενδεχομένων.

τότε $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim P(A_n)$.

Πώς μπορώ να κατασκευάσω μέτρο από διαμέριση του Ω;

Ω σύνολο.

$A_1, A_2, \ldots A_n$ διαμέριση του Ω.

$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{X})$, $\mathcal{X} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$

Μπορώ να ορίσω τη συνάρτηση:

$\mu: \sigma(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$

όπου $\mu(A_i) = \lambda_i \in \mathbb{R}$ αυθαίρετα

και $\mu(\emptyset) = 0$

Σε αυτή τη περίπτωση το μ είναι μέτρο στο $(\Omega, \sigma(\mathcal{X}))$.

Άπειρες Ρίψεις Νομίσματος

$\underline{\Omega} = \{$ "λέξεις" απείρου μήκους από $\kappa, \rho \}$

Θεωρούμε τις σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \ldots$

που αντιστοιχούν στην πληροφόρηση των n πρώτων ρίψεων. με $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \underline{\Omega}\}$

$$\text{και } \mathcal{F}_k = \sigma\left(\{A_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k}\}\right) \quad k = 1, 2, \ldots$$

Τώρα όμως $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \ldots$ και η $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$

δεν είναι σ-άλγεβρα και ορίζουμε την $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$

Μπορώ να ορίσω κατά μοναδικό τρόπο ένα μέτρο πιθανότητας P στην $\mathcal{F}_\infty$ εφαρμόζοντας της προηγούμενης θεώρημα επέκτασης του μέτρου.

Πρέπει να καθορίσω ένα μέτρο P για κάθε $\mathcal{F}_n$.

1) Για την $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \underline{\Omega}\}$ ορίζω το μ.π. $P(\phi) = 0$, $P(\underline{\Omega}) = 1$

2) Για την $\mathcal{F}_1 = \sigma(\{A_{\omega_1}\}) = \{\phi, \underline{\Omega}, A_\kappa, A_\rho\}$ ορίζω το μ.π.

$P(\phi) = 0$, $P(\underline{\Omega}) = 1$ και $P(A_\kappa) = P(A_\rho) = \frac{1}{2}$ δίκαιο. + ανεξ. ρίψεις

3) Για την $\mathcal{F}_2 = \sigma(\{A_{\omega_1\omega_2}\}) = \sigma(\{A_{\kappa\kappa}, A_{\kappa\rho}, A_{\rho\kappa}, A_{\rho\rho}\})$ ορίζω το μπ

$P(\phi) = 0$, $P(\underline{\Omega}) = 1$ και $P(A_{\kappa\kappa}) = P(A_{\kappa\rho}) = P(A_{\rho\kappa}) = P(A_{\rho\rho}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

⋮

Για την $\mathcal{F}_n = \sigma(\{A_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}\})$ → διαμέριση του $\underline{\Omega}$. ορίζω το μπ. με $P(\phi) = 0$, $P(\underline{\Omega}) = 1$ και $P(A_{\omega_1\ldots\omega_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Οι ιδιότητες του μ.π. περνάνε μεταφέρονται στο μ.π. στην $\mathcal{F}_\infty$

Πώς; Παίρνω για παράδειγμα

άπειρα κ.

$A_1 = A_k \in \mathcal{F}_1$

$A_2 = A_{kk} \in \mathcal{F}_2$

$A_3 = A_{kkk} \in \mathcal{F}_3$

$\vdots$

Τότε $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{kkk\dots\} \in \mathcal{F}_\infty$

Επίσης $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ φθίνουσα ακολουθία ενδεχ.

και $P(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ είναι μ.π.

Οπότε το $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim P(A_n) = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

↳ σχεδόν ποτέ

Τα σύνολα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $\limsup A_n$, $\liminf A_n$

δ.χ. Ω και $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα στο Ω

$A_1, A_2, A_3, \dots$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$.

Πραγματοποιείται η $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ αν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα $A_1, A_2, \dots$

" η $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ αν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα $A_1, A_2, \dots$

Πότε πραγματοποιείται το $\limsup A_n$;

Κατασκευή

$B_1 = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

$B_2 = A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \dots = \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

$\vdots$

$B_n = A_n \cup A_{n+1} \cup \dots = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$

$B_1, B_2, B_3, \dots$ φθίνουσα ακολουθία

Ορίζω με $B = B_1 \cap B_2 \cap \dots = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ και αυτό το σύνολο είναι το $\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$.

Πραγματοποιείται το $\limsup A_n$ αν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα B_n αν. πραγματοποιούνται ταυτόχρονα οι απειροπληθείς ενώσεις $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k, \dots \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \dots$ αν πραγματοποιούνται άπειρα από τα $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$.

$$\limsup A_n := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ να γίνεται για άπειρα } n\}$$

και $\omega \in \limsup A_n$ αν ω ανήκει σε άπειρα A_n. (infinitely often ή i.o.)

<u>Πότε πραγματοποιείται το $\liminf A_n$;</u>

<u>Κατασκευή</u> Θεωρώ τα σύνολα

$C_1 = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1} \cap \dots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

$C_2 = A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1} \cap \dots = \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$ και $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots \subseteq C_n \subseteq \dots$ αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$

$\vdots$

$C_n = A_n \cap A_{n+1} \cap \dots = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

Θεωρώ το $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$ και είναι το $\liminf A_n$

Δηλ. $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$.

Πραγματοποιείται το $\liminf A_n$ αν πραγματοποιείται τουλ. ένα από τα $C_1, C_2, \dots$ αν πραγματοποιείται τουλ. ένα από τα

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k, \quad \dots \quad \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \dots$$

αν περιέχεται σε όλα τα $A_{n_0}, A_{n_0+1}, \dots$ από κάποιο n και μετά

Άρα $\liminf A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ για κάθε $n \geq n_0\}$

$a \in \liminf A_n$ αν $a \in A_n$ για κάθε $n \geq n_0$

<u>Πρόταση</u> $\displaystyle \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$