Ανάλυση Πιθανοτήτων Διάλεξη 3η: 19/12/2020

- Τα σύνολα limsup A_n και liminf A_n (συνέχεια)
- Λήμμα Borel-Cantelli
- Μετρήσιμες Συναρτήσεις - Τυχαίες Μεταβλητές

Είχαμε ορίσει τα $\limsup A_n$, $\liminf A_n$ μιας ακολουθίας $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$.

→ Έστω $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ τότε $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ για άπειρα $n\}$

άρα $\omega \in \limsup A_n$ αν $\omega \in$ σε άπειρα A_n (infinitely often i.o.)

Το $\limsup A_n$ πραγματοποιείται αν πραγματοποιούνται άπειρα από τα $A_1, A_2, \dots$

→ Έστω $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ τότε $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ για κάθε $n \geq n_0\}$

άρα $\omega \in \liminf A_n$ αν $\omega \in A_n$ για κάθε $n \geq n_0$.

Το $\liminf A_n$ πραγματοποιείται αν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα όλα τα $A_{n_0}, A_{n_0+1}, \dots$

<u>Σχόλιο</u>: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Ταυτοχρόνως όλα τα A_n — ταυτόχρονα όλα τα $A_{n_0}, A_{n_0+1}, \dots$ — άπειρα από τα A_n — τουλάχιστον ένα από τα A_n

Παρατήρηση

- Η πραγματοποίηση των $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ απαιτεί να γνωρίζω όλη την ακολουθία των $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$.
- Η πραγματοποίηση των $\liminf A_n, \limsup A_n$ απαιτεί τη γνώση της "ουράς" δηλ. των $A_n, A_{n+1}, \dots \in \mathcal{F}$.

Άπειρες Ρίψεις Νομίσματος.

Ερμηνεία Έστω ότι το A_n = "η n-οστή ρίψη να είναι Κ" (επιτυχία)

Τότε το $\limsup A_n$ = "Ακολουθίες με άπειρα πολλά Κ" $\ni \{ΚΓΚΓΚΓ\dots\}$ (άπειρο πλήθος επιτυχιών ακόμα και αν έχω άπειρες αποτυχίες)

$\liminf A_n$ = "Ακολουθίες με όλα Κ από μία ρίψη και μετά." $\not\ni \{ΚΓΚΓ\dots\}$ $\ni \{ΚΓΚΚΚΚΚ\dots\}$ όλες επιτυχίες από κάποιο n και μετά.

$\{ΚΓΓΓΓ\dots\} \notin \limsup A_n$ αλλά $\{ΚΓΓΓ\dots\} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ Ερμηνεία

Συμπληρωματικά

1) $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$ όλες αποτυχίες (όλα Γ)
2) $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ τουλάχιστον μία αποτυχία (τουλ. ένα Γ)
3) $\left(\limsup A_n\right)^c = \liminf A_n^c$ όλες αποτυχίες από κάποιο n και πέρα (όλα Γ από κάποιο και πέρα)
4) $\left(\liminf A_n\right)^c = \limsup A_n^c$ άπειρο πλήθος αποτυχιών (άπειρα Γ ακόμα και αν έχω άπειρα Κ)

Ιδιότητες Έστω $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ τότε

1. Αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \dots$ δηλ. αύξουσα ακολ. τότε $\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
2. Αν $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \dots$ δηλ. φθίνουσα ακολ. τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n = \limsup A_n$

Λήμματα Borel - Cantelli

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ακολουθία ενδεχομένων

1ο Λήμμα B-C

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ τότε $P(\limsup A_n) = P(A_n \text{ i.o.}) = 0$ σχεδόν ποτέ.

(συγκλίνει)

2ο Λήμμα

Έστω $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων

$(P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$ για κάθε $i \neq j)$

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ (αποκλίνει) τότε $P(\limsup A_n) = 1$ σχεδόν βέβαια σ.β.

Σχόλιο για τις ικανές συνθήκες

$P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n), \dots$ $P(A_n) \in [0,1]$

Τι σημαίνει για τους όρους η $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$:
- $< \infty$ πλησιάζει γρήγορα το 0 καθώς αυξάνει το n.
- $+\infty$. τότε είναι σταθερή είτε φθίνουν με αργό ρυθμό.

$P(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ γεωμ. σειρά

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ γρήγορα οι όροι φθίνουν $\Rightarrow \sum P(A_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + 0 + 0 + 0$. κάποια στιγμή

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}} = 1 < \infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$$

$P(A_n) = \frac{1}{2}$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 1$.

αρμονική σειρά.

$P(A_n) = \frac{1}{n}$, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = +\infty$

Παράδειγμα Άπειρες Ρίψεις Νομίσματος

$\Omega =$ "λέξεις" άπειρου μήκους από Κ,Γ.

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$

$\mathcal{F}_n = \sigma(\{A_{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n}\})$

Έστω τα ενδεχόμενα

$A =$ "υπάρχει τουλ. μία τετράδα διαδοχικών Κ"

$B =$ "υπάρχουν άπειρες τετράδες από διαδοχικά Κ"

$P(A), P(B) = ;$

Θεωρώ την παρακάτω ακολουθία ενδεχομένων.

$B_1 = \{$"λέξεις" που έχουν διαδ. τετράδα από Κ στις ρίψεις $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$

$B_2 = \{$"λέξεις" " " " " " " $\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$

$\vdots$

$B_n = \{$"λέξεις" που έχουν διαδ. τετράδα από Κ στις ρίψεις $\omega_n,\dots,\omega_{n+3}\}$.

Ακολουθία από $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}_\infty$

όπου $B_1, B_2, \dots$ ανεξάρτητα ενδεχόμενα αφού οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες

για δίκαιο νόμισμα έχω $P(B_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ $\forall n \to \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = +\infty$

και άρα από 2ο Λήμμα B-C έχω ότι $P(\limsup B_n) = 1 \Rightarrow P(B) = 1$

να έχω άπειρες διαδ. τετράδες.

$$B = \limsup B_n \subseteq A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \text{τουλ. μία τετράδα} \Rightarrow 1 = P(B) \leq P(A)$$

άρα $P(A) = 1$.

Απόδειξη του 1ου B-C

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ τότε $P(\limsup A_n) = 0$

Θέτω $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ τότε η ακολ. $B_1, B_2, \ldots$ είναι φθίνουσα

δηλ. $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \supseteq B_n \supseteq B_{n+1} \supseteq \ldots$

$B_1 = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$

$B_2 = A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$

$\vdots$

$B_n = A_n \cup \ldots$

άρα $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_n P(B_n)$

$$P(\limsup A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim P(B_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \overset{\text{ιδιότ. μέτρου}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

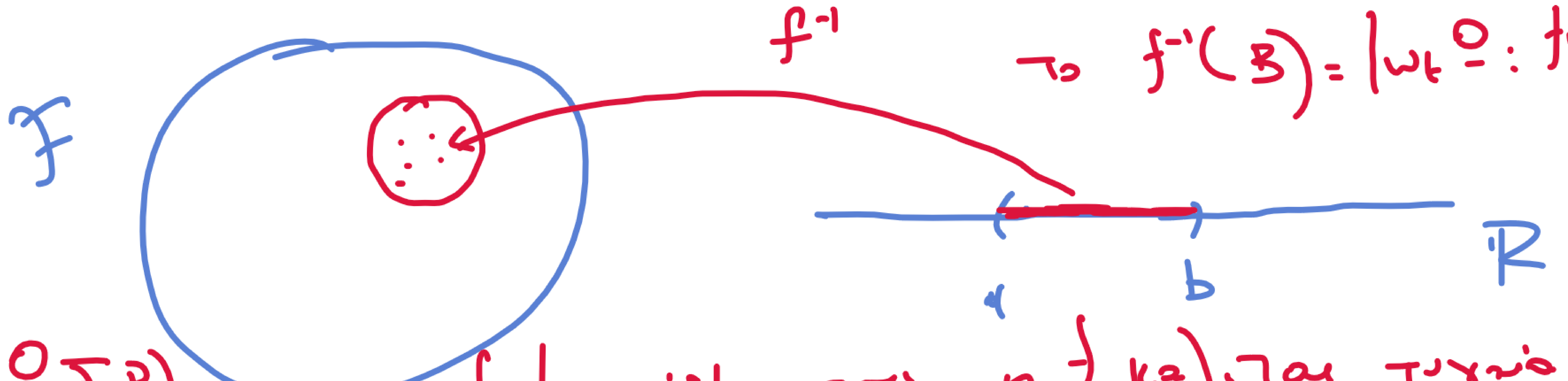
και $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(A_n)$ γίνεται γρήγορα ίση με 0 από κάποιο n και πέρα

Τελικά $0 \leq P(\limsup A_n) \leq 0 \Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ Ή ΜΕΤΡΗΣΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ...

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ χ.μ.

Μια συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{R}$ καλείται $\mathcal{F}$-μετρήσιμη αν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}, a<b$ ισχύει ότι $\{\omega \in \Omega : a < f(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$. δηλ. αν για κάθε Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ το $f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$



Αν έχω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και f μετρήσιμη τότε η f καλείται τυχαία μεταβλητή και συμβολίζεται με $X, Y, Z, \dots$

Πρόταση Η $f: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ανν

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ ισχύει } f^{-1}(B) = \{f \in B\} \in \mathcal{F}$$

Παραδείγματα

1) Ρίψη 2 ζαριών $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$ και $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad f(i,j) = i+j$ άθροισμα ενδείξεων.

$$f(i,j) = 6 \Leftrightarrow f^{-1}(6) = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \in \mathcal{F}$$

$$1 < f(i,j) < 4 \Leftrightarrow f^{-1}((1,4)) = \{(1,2),(2,1),(1,1)\} \in \mathcal{F}$$

$$f(i,j) \leq 100 \Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, 100]) = \Omega \in \mathcal{F}$$

2. Ρίψη 3 διαδοχικών νομισμάτων όπου κερδίζω $+2€$ για κάθε Γ
χάνω $1€$ για κάθε Κ.

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ περιγράφει το συνολικό κέρδος μετά τις τρεις ρίψεις

$$f(\omega) = \begin{cases} -3, & \omega \in B_0 = \{KKK\} \\ 0, & \omega \in B_1 = \{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\} \\ 3, & \omega \in B_2 = \{\Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma\} \\ 6, & \omega \in B_3 = \{\Gamma\Gamma\Gamma\} \end{cases}$$

Διαμέριση του Ω

$$\mathcal{F} = \sigma(\{B_0, B_1, B_2, B_3\})$$

Η f είναι τ.μ. γιατί υπάρχει μία 1-1 αντιστοίχιση μεταξύ των ζαριών.

και των στοιχείων της διαμέρισης. άρα

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχω $f^{-1}(B) \in \sigma(\{B_0, B_1, B_2, B_3\})$

$$f^{-1}((1,5)) = B_2 \in \mathcal{F}.$$

$$f^{-1}((-2,3]) = B_1 \cup B_2 \in \mathcal{F}$$

<u>Ιδιότητες Μετρήσιμων (τ.μ.)</u> Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ χ.μ. (χ.π.)

1. Αν $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες (τμ) τότε και οι

   c, $f \pm g$, λf, $\lambda f + kg$, $f \cdot g$, f/g $(g \neq 0)$ είναι επίσης μετρήσιμες (τμ)
   $c, \lambda, k \in \mathbb{R}$.

2. Αν $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες (τμ) τότε και οι

   $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $|f| = \max\{f, -f\}$, $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$
   είναι μετρήσιμες (τμ)

3. Αν $f_1, f_2, \dots : \Omega \to \mathbb{R}$ ακολουθία μετρήσιμων (τμ) και

   $\forall \omega \in \Omega$ ισχύει $\lim f_n(\omega) = f(\omega)$ σύγκλιση κατά σημείο

   τότε και η συνάρτηση $f := \lim f_n$ είναι μετρήσιμη (τμ)

4. Αν $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και μία $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής (Borel μετρήσιμη)
   τότε και η $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $g \circ f(\omega) = g(f(\omega))$ είναι μετρησ. μ

και άρα και οι $f^{\nu}, e^{f}, \sin f, \log f, \sqrt{|f|}, \ldots$ είναι μετρήσιμες