Lecture 5 Ανάλυση - Πιθανότητες 13/1/2021

Υπενθύμιση

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π.

ΒΑΣΙΚΕΣ Τ.Μ.

1) **Δείκτριες Τ.Μ.** Για $A \in \mathcal{F}$ και $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ με $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$ είναι τ.μ. και καλείται δείκτρια

2) **Απλές Τ.Μ.** Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ διαμέριση του Ω και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Η $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $f = \lambda_1 \chi_{A_1} + \lambda_2 \chi_{A_2} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n}$ δηλ. $f(\omega) = \begin{cases} \lambda_1, & \omega \in A_1 \\ \lambda_2, & \omega \in A_2 \\ \vdots \\ \lambda_n, & \omega \in A_n \end{cases}$

είναι τ.μ. και καλείται απλή.

3) **Μη αρνητικές τ.μ.** Για κάθε μη αρνητική τμ $f : \Omega \to [0, +\infty)$ ισχύει ότι υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $f_1, f_2, \dots$ μη αρνητικών απλών δηλ. $\forall \omega \in \Omega$: $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ (κα

και ώστε $\forall \omega \in \Omega$ $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$ (σύγκλιση κατά σημείο)

δηλ. $f = \lim f_n$ (κ.σ.).

4) **τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$** Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ τμ. Αυτή γράφεται ως διαφορά δύο μη αρνητικών τμ $f^+, f^- : \Omega \to [0, +\infty)$ όπου $f = f^+ - f^-$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ LEBESGUE

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ τμ.

Τότε $E[f] = \int f \, dP \to$ ολοκλήρωμα Lebesgue.

μέση τιμή της f.

1) Δείκτρια χ_A για $A \in \mathcal{F}$ τότε $E[\chi_A] = \int \chi_A \, dP = P(A)$

2) Απλή: $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$ τότε $E[f] = \int f \, dP = \int \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i} \, dP \overset{\text{γραμ}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int \chi_{A_i} \, dP = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(A_i)$

3) Μη αρνητική: Η τμ $f : \Omega \to [0, +\infty)$ προκύπτει από $f = \lim f_n$ (κ.σ.) όπου

$f_1, f_2, \dots$ αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών τμ. Τότε από $\underline{\text{ΘΜΣ}}$

έχω ότι $\int f\,dP = \lim_n \int f_n\,dP$

4) Έστω $f: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. με αρνητικές τιμές στο $\mathcal{F}$.
και $f = f^+ - f^-$, $f^+, f^- \geq 0$ τ.μ. και ορίζω $E(f) = \int f\,dP = \int (f^+ - f^-)\,dP = \int f^+ dP - \int f^- dP$

Πώς αποδεικνύω ιδιότητες στην οικογ. μετρήσιμων συναρτήσεων. με Standard Machine

B1. Αποδεικνύω το ζητούμενο για δείκτες

B2. " " " για απλές από γραμμικότητα και το B1

B3. " " " μη αρνητικές από ΘΜΣ και το B2

B4 " " " για τ.μ. με αρνητικές τιμές από γραμμικότητα και B3

Αόριστο Συνεχές Μέτρο

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χ.μ. και $f: \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και $A \in \mathcal{F}$.

Ορίζω ως $\int_A f\,d\mu = \int f \cdot \chi_A\,d\mu$ όπου $(f \cdot \chi_A)(\omega) = f(\omega) \cdot \chi_A(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \omega \in A \\ 0 & \text{διαφ.} \end{cases}$

Παρατήρηση Αν $f \geq 0$, τότε $f \cdot \chi_A \geq 0$ άρα και $\int f \cdot \chi_A\,d\mu \geq 0$

ν.ο. μέτρο

$\mu: \mathcal{F} \to [0, \infty]$
όπου $\mu(\emptyset) = 0$
και για $A_1, A_2, \ldots$ ξένα μεταξύ τους
$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Έστω η συνάρτηση $\nu(A) := \int_A f\,d\mu = \int_A f \chi_A\,d\mu$ για $A \in \mathcal{F}$ όπου $f \geq 0$

$\to$ $\nu(A) \geq 0$ από πριν $\forall A \in \mathcal{F}$.

$\to$ $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f\,d\mu = \int f \cdot \chi_\emptyset\,d\mu = \int f \cdot 0\,d\mu = \int 0\,d\mu = 0$

$\to$ Έστω $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ ξένα ανά δύο τότε

$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f\,d\mu = \int f \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \int f \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}\,d\mu \overset{\text{Beppo-Levi}}{=}$

$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \omega \in A_n$ γιατί $A_1, A_2, \ldots$ ξένα μεταξύ τους.
$\chi_{\cup A_n} = 1 \Leftrightarrow \chi_{A_n} = 1$, $\chi_{A_k} = 0$ $k \neq n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int f\cdot \chi_{A_n}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

Άρα το $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ είναι ένα <u>μέτρο</u> στη σ-αλγ. $\mathcal{F}$.

<u>Ορισμός</u> Έστω δύο μέτρα μ, ν ορισμένα στην ίδια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$.

Λέμε ότι το ν <u>είναι απολύτως συνεχές ως προς το</u> μ (συμβ. <u>$\nu \ll \mu$</u>)

αν για τα $A \in \mathcal{F}$ με $\mu(A) = 0$ ισχύει ότι $\nu(A) = 0$

<u>Παρατήρηση</u> Το $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ όπου $f \geq 0$ ισχύει $\nu \ll \mu$.

Έστω $A \in \mathcal{F}$ με $\mu(A) = 0$ τότε το $\nu(A) = \int_A f\, d\mu = \int f\cdot\chi_A\, d\mu =$

$\omega \in A$: $\int f(\omega)\cdot\chi_A\, d\mu = f(\omega)\int \chi_A\, d\mu = f(\omega)\,\mu(A) = f(\omega)\cdot 0 = 0$

$\omega \notin A$: $f\cdot\chi_A = 0$, $= \int 0\, d\mu = 0$

άρα δείξαμε ότι $\nu(A) = 0$.

Άρα το ν απολύτως συνεχές ως προς το μ

<u>Πρόταση</u> Έστω $A \in \mathcal{F}$ και $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ (μέτρο $\nu \ll \mu$), $f \geq 0$

Για κάθε μετρήσιμη $g: \Omega \to \mathbb{R}$ ισχύει $\int g\, d\nu = \int f g\, d\mu$

<u>Απόδειξη (με Standard Machine)</u>

<u>ΒΗΜΑ 1</u> Έστω $g = \chi_A$, $A \in \mathcal{F}$ (δείκτρια)

Τότε $\int g\, d\nu = \int \chi_A\, d\nu = \nu(A) = \int_A f\, d\mu = \int f\cdot\chi_A\, d\mu \overset{g=\chi_A}{=} \int f\cdot g\, d\mu$ άρα το δείξαμε για δείκτριες.

<u>ΒΗΜΑ 2</u> Έστω $g = \sum_{n=1}^{n} \lambda_n \chi_{A_n}$, $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ διαμέριση του Ω, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\int g\,dv = \int \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}\,dv \overset{\text{γραμ}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int \chi_{A_i}\,dv \overset{①}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int f\cdot\chi_{A_i}\,d\mu \overset{\text{γραμ}}{=}$$

$$= \int \sum_{i=1}^{n} f\cdot\lambda_i\chi_{A_i}\,d\mu = \int f \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}\,d\mu = \int f\cdot g\,d\mu.$$ Το δείξαμε για απλή.

Βήμα 3 Έστω g μη αρνητική μετρ. άρα υπάρχει αύξουσα ακολ. απλών $g_1, g_2, \ldots : \Omega \to [0,+\infty)$

όπου $g = \lim g_n$ (κ.σ.) τότε από ΘΜΣ

$$\int g\,dv \overset{\text{ΘΜΣ}}{=} \int \lim g_n\,dv = \lim \int g_n\,dv \overset{②}{=} \lim \int f\cdot g_n\,d\mu \overset{\text{ΘΜΣ}}{=} \int f\cdot \lim g_n\,d\mu$$

$$= \int f\cdot g\,d\mu.$$

Βήμα 4 Έστω g αθροιστή μετρ. $g: \Omega \to \mathbb{R}$ τότε $g = g^+ - g^-$, $g^+, g^- \geq 0$

τότε $$\int g\,dv = \int (g^+ - g^-)\,dv \overset{\text{γραμ}}{=} \int g^+\,dv - \int g^-\,dv \overset{③}{=} \int f\cdot g^+\,d\mu - \int f g^-\,d\mu$$

$$= \int f\,(g^+ - g^-)\,d\mu = \int f\cdot g\,d\mu.$$

■

Παράγωγος Radon-Nikodym

Αν μ, ν δύο μέτρα ορισμένα στην ίδια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ και $\nu \ll \mu$

τότε υπάρχει μοναδική μη-αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση

$$f: \Omega \to [0,+\infty)$$

τέτοια ώστε για κάθε $A \in \mathcal{F}$ να $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$.

Η f καλείται παράγωγος Radon-Nikodym (R-N) και συμβολίζεται με $f = \frac{dv}{d\mu}$

Άμεσες Συνέπειες

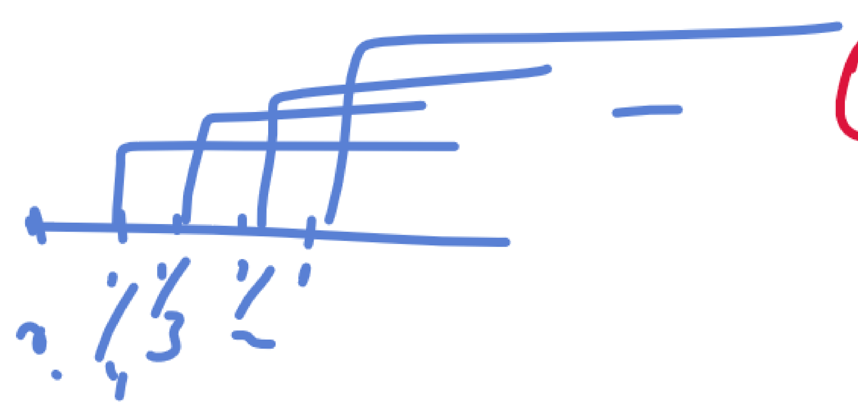
① Αν η f παράγωγος R-N τότε για κάθε μετρήσιμη $g: \Omega \to \mathbb{R}$ ισχύει $\int g\,dv = \int f g\,d\mu$.

2) Αν η $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη ώστε $\int_A f\,d\mu = 0$, για κάθε $A\in\mathcal{F}$

τότε η $f=0$ σχεδόν παντού (ή ισοδύναμα $\mu(\{\omega\in\Omega \mid f(\omega)\neq 0\})=0$)

Απόδ. Θεωρώ για $n\in\mathbb{N}$: $A_n=\{\omega\in\Omega \mid f(\omega)\geq \frac{1}{n}\} = [f\geq \frac{1}{n}]$

Η f μετρήσιμη άρα $A_n\in\mathcal{F}$.



$$0 \overset{A_n\in\mathcal{F}}{=} \int_{A_n} f\,d\mu = \int f\chi_{A_n}\,d\mu = \int f(\omega)\overset{1}{\overset{\|}{\chi_{A_n}}}\,d\mu \geq \int \frac{1}{n}\chi_{A_n}\,d\mu$$

$$= \frac{1}{n}\int \chi_{A_n}\,d\mu = \frac{\mu(A_n)}{n} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0\geq \mu(A_n)\geq 0 \Leftrightarrow \mu(A_n)=0$$

$$[f>0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f\geq \tfrac{1}{n}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow 0\leq \mu([f>0]) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

$$\Rightarrow \mu([f>0])=0$$

Όμοια αποδεικνύω ότι $\mu([f<0])=0$

Άρα. Το ζητούμενο έπεται $[f\neq 0] = [f<0] \overset{\text{ξένα}}{\cup} [f>0] \Rightarrow \mu([f\neq 0]) = \mu(f>0)+\mu(f<0) = 0$

③ Υπάρχει μοναδική μη αρνητική μετρήσιμη f τέτοια ώστε $\nu(A)=\int_A f\,d\mu,\ \forall A\in\mathcal{F}$

Απόδειξη Έστω μη αρνητική μετρήσιμη h: $\nu(A)=\int_A h\,d\mu\ \ \forall A\in\mathcal{F}$.

για κάθε $A\in\mathcal{F}$ $\quad \int_A f\,d\mu = \int_A h\,d\mu \Leftrightarrow \int f\chi_A\,d\mu = \int h\chi_A\,d\mu \Leftrightarrow \int (f-h)\chi_A\,d\mu = 0$

$$\Leftrightarrow \int_A (f-h)\,d\mu = 0 \quad \forall A\in\mathcal{F}$$

$\Leftrightarrow f-h=0$ σχεδόν παντού

$\Leftrightarrow f=h$ σχεδόν παντού

Η έννοια "σχεδόν παντού" στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χ.μ.

Η πρόταση $\Pi(\omega)$ είναι αληθής σχεδόν παντού αν για το σύνολο $A = \{\omega \in \Omega : \Pi(\omega) \text{ ψευδής}\}$ υπάρχει $B \in \mathcal{F}$ με $A \subseteq B$ και $\mu(B) = 0$

Προφανώς αν $A \in \mathcal{F}$ τότε $0 \le \mu(A) \le \mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν ακόμα και αν οι προϋποθέσεις τους είναι αληθής σχεδόν παντού.

Σε ένα χώρο πιθανότητας το "σχεδόν παντού" γίνεται "με πιθανότητα 1"

Επιπλέον ιδιότητες: Αν $f, g \ge 0$ μετρήσιμες στον χ.μ. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ τότε

1) Αν $f = 0$ σπ, τότε $\int f \, d\mu = 0$
2) Αν $\mu(\{f > 0\}) > 0$, τότε $\int f \, d\mu > 0$.
3) Αν $\int f \, d\mu < \infty$, τότε $f < \infty$ σπ.
4) Αν $f \le g$ σπ (κατά σημείο δηλ $\forall \omega \in \Omega$) τότε $\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$
5) Αν $f = g$ σπ, τότε $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

Ορισμός: Δύο μέτρα μ, ν ορισμένα στην ίδια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ λέγονται ισοδύναμα

ανν $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$.

ή ισοδύναμα $\left\{ \begin{array}{l} \text{για } A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \\ \text{για } A \in \mathcal{F} : \nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0 \end{array} \right\}$ $\quad \mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0$

Σε χ.π. $(\Omega, \mathcal{F})$ τα μέτρα P, Q ισοδύναμα ανν ισχύει ότι

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$$
$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$
$$P(A^c) = 1 \Leftrightarrow Q(A^c) = 1$$

Ερώτημα: Έστω δύο ισοδύναμα μέτρα μ, ν.
Ποιά η σχέση μεταξύ των παραγώγων Radon-Nikodym.

μ, ν ισοδύναμα στην $\mathcal{F}$ $\Leftrightarrow$ $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$. R-N $\Leftrightarrow$ ορίζεται μοναδική f: $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$, $A \in \mathcal{F}$

" $g = \frac{d\mu}{d\nu}$, $\mu(A) = \int_A g \, d\nu$

Απάντηση: $g = 1/f$ ή $\frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1}$

Απόδειξη: Θέτω μ, ν ισοδύναμα μέτρα και $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ είναι η παρ. R.N του ν ως προς το μ

και $g = \frac{d\mu}{d\nu}$ είναι η παρ. R.N του μ ως προς ν

Τότε $g = 1/f$.

Επειδή μ, ν ισοδύναμα έχω ότι $\nu \ll \mu$ τότε υπάρχει μοναδική $f > 0$ που είναι η παρ R-N ώστε για $A \in \mathcal{F}$: $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ και για κάθε μετρήσιμη $g: \Omega \to \mathbb{R}$

να ισχύει $\int g \, d\nu = \int f \cdot g \, d\mu$.

Έπεται $\mu(A) = \int \chi_A \, d\mu = \int \left(\frac{1}{f} \cdot \chi_A\right) f \, d\mu = \int \frac{1}{f} \cdot \chi_A \, d\nu = \int_A \frac{1}{f} \, d\nu$.

$\underbrace{\left(\frac{1}{f} \cdot \chi_A\right)}_{= g}$

$\int_A \frac{1}{f} \, d\nu$ ⇓ παράγωγος Radon-Nikodym του μ ως προς το ν είναι $d\mu / d\nu = 1/f$.