~ Ανάλυση - Πιθανότητες Τελευταία Διάλεξη 23/1/2021

Δεσμευμένη Μέση Τιμή $E[f|\mathcal{G}]$ στο χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-υποάλγ.

1η Περίπτωση Δέσμευση ως προς ενδεχόμενο $B \in \mathcal{F}$

$$E[f|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B f \, dP$$

Παράδειγμα
- Ρίχνω 3 δίκαια νομίσματα με αξίες 2€, 1€, 0.5€, αντ.
- Ανεξάρτητες ρίψεις

$\Omega = \{kkk, krk, kkr, \dots, rrr\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ και μ.π. $P_{kkk} = P_{krk} = \dots = P_{rrr} = \frac{1}{8}$

Έστω $f: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.ω. f = άθροισμα αξιών στην περίπτωση που έρχεται k.
διαφορετικά η αξία από το συγκεκρ. νόμισμα 0.

Έστω το ενδ. B = "να έρθουν 2r" $= \{krr, rrk, rkr\}$. με $P(B) = \frac{3}{8}$

$$E[f|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B f \, dP = \frac{1}{P(B)} \int f \chi_B \, dP =$$

$$= \frac{1}{P(B)} \int \left(f(krr) \chi_{\{krr\}} + f(rrk) \chi_{\{rrk\}} + f(rkr) \chi_{\{rkr\}} \right) dP \quad \text{γραμμ.}$$

$$= \frac{1}{P(B)} \left[f(krr) \int \chi_{\{krr\}} \, dP + f(rrk) \int \chi_{\{rrk\}} \, dP + f(rkr) \int \chi_{\{rkr\}} \, dP \right)$$

$$= \frac{1}{P(B)} \left(f(krr) P_{krr} + f(rrk) P_{rrk} + f(rkr) P_{rkr} \right) = \frac{1}{3/8} \left[2 \cdot \frac{1}{8} + 0.5 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} \right]$$

$$\Rightarrow E[f|B] = \frac{8}{3} \cdot \frac{3.5}{8} = \frac{7}{6}. \quad \text{ορισμός}$$

Ειδική περίπτωση : Δέσμευση ως προς απλή g. τ.μ.

Έστω $g = b_1\chi_{B_1} + \dots + b_n\chi_{B_n}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, $B_1, \dots, B_n$ διαμέριση του Ω

$P(B_i) > 0$

Τότε η $E[f|g]$ είναι $\sigma(g)$-μετρήσιμη με

$$E[f|g](\omega) = \begin{cases} E[f|B_1], & \omega \in B_1 \\ E[f|B_2], & \omega \in B_2 \\ \vdots & \\ E[f|B_n], & \omega \in B_n \end{cases} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[f|B_i]}_{\in \mathbb{R}} \chi_{B_i} \quad \text{απλή τ.μ.}$$

Συνέχεια από το προηγούμενο παράδειγμα

$\Omega = \{κκκ, κγκ, κγγ, κκγ, γκκ, γκγ, γγκ, γγγ\}$

Έστω g = άθροισμα των αξιών των 2 τελευταίων νομισμάτων, στην έδρα κ.

Τότε

$$g(\omega) = \begin{cases} 1.5, & \omega \in B_1 = \{κκκ, γκκ\} \\ 0.5, & \omega \in B_2 = \{κγκ, γγκ\} \\ 1, & \omega \in B_3 = \{κκγ, γκγ\} \\ 0, & \omega \in B_4 = \{γγγ, κγγ\} \end{cases} = 1.5\chi_{B_1} + 0.5\chi_{B_2} + 1\cdot\chi_{B_3} + 0\chi_{B_4} \quad \text{απλή τ.μ.}$$

Τα B_1, B_2, B_3, B_4 διαμέριση του Ω με $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = \frac{1}{4}$

$E[f|g] = ;$

$$E[f|g](\omega) = \begin{cases} E[f|B_1], & \omega \in B_1 \\ \vdots & \\ E[f|B_4], & \omega \in B_4 \end{cases}$$

Υπολογίζω: $E[f|B_1]$, $E[f|B_2]$, $E[f|B_3]$, $E[f|B_4]$

$$E[f|B_1] = \frac{1}{P(B_1)} \int_{B_1} f\,dP = \frac{1}{P(B_1)} \int f\cdot \chi_{B_1}\,dP = \frac{1}{P(B_1)} \int \left(f(rkk)\,\chi_{\{rkk\}} + f(kkk)\,\chi_{\{kkk\}} \right) dP$$

$$= \dots = \frac{1}{P(B_1)} \left[f(rkk)\,P_{rkk} + f(kkk)\,P_{kkk} \right] = \frac{1}{\frac{1}{4}} \left[1{,}5\cdot\frac{1}{8} + 3{,}5\cdot\frac{1}{8} \right] = \frac{5}{2}$$

$$E[f|B_2] = \frac{1}{P(B_2)} \int_{B_2} f\,dP = \frac{1}{P(B_2)} \int f\,\chi_{B_2}\,dP = \frac{1}{P(B_2)} \int \left(f(krk)\,\chi_{\{krk\}} + f(rrk)\,\chi_{\{rrk\}} \right) dP$$

$$= \dots = \frac{1}{P(B_2)} \left[f(krk)\,P_{krk} + f(rrk)\,P_{rrk} \right] = \frac{1}{\frac{1}{4}} \cdot \left[2{,}5\cdot\frac{1}{8} + 0.5\,\frac{1}{8} \right] = \frac{3}{2}$$

$$E[f|B_3] = \frac{1}{P(B_3)} \int_{B_3} f\,dP = \dots = \frac{1}{P(B_3)} \left[f(kkr)\,P_{kkr} + f(rkr)\,P_{rkr} \right] = \frac{1}{\frac{1}{4}} \left[3\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{8} \right] = 2$$

$$E[f|B_4] = \frac{1}{P(B_4)} \int_{B_4} f\,dP = \dots = \frac{1}{P(B_4)} \left[f(krr)\,P_{krr} + f(rrr)\,P_{rrr} \right] = \frac{1}{\frac{1}{4}} \left[2\cdot\frac{1}{8} + 0\cdot\frac{1}{8} \right] = 1.$$

Άρα
$$E[f|\mathcal{G}] = \begin{cases} 2.5, & \omega \in B_1 \\ 1.5, & \omega \in B_2 \\ 2, & \omega \in B_3 \\ 1, & \omega \in B_4 \end{cases} = 2.5\,\chi_{B_1} + 1.5\,\chi_{B_2} + 2\chi_{B_3} + 1\cdot\chi_{B_4}$$

$= g + 1.$ προφανώς ότι η $E[f|\mathcal{G}]$ είναι $\sigma(g)$-μετρήσιμη.

$$g = 1.5\,\chi_{B_1} + 0.5\,\chi_{B_2} + 1\,\chi_{B_3} + 0\,\chi_{B_4}$$

$$\boxed{E[\chi_B] = \int \chi_B\,dP = P(B)}$$

ΘΔΜΤ $E[f] = E\left[E[f|\mathcal{G}]\right] = E\left[2.5\chi_{B_1} + 1.5\chi_{B_2} + 2\chi_{B_3} + 1.\chi_{B_4}\right] \overset{\text{γραμμ.}}{=}$

$$= 2.5\cdot P(B_1) + 1.5\,P(B_2) + 2P(B_3) + 1.P(B_4) = \frac{7}{4}.$$

3η Περίπτωση: Έστω $g: \Omega \to \mathbb{R}$ οποιαδήποτε τ.μ. Τότε

η $E[f|g]: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τ.μ. τέτοια ώστε

(i) να είναι $\sigma(g)$-μετρήσιμη

(ii) $\displaystyle\int_B E[f|g]\,dP = \int_B f\,dP$ για κάθε $B \in \sigma(g)$

Ορισμός της $E[f|\mathcal{G}]$

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-υποάλγεβρα της $\mathcal{F}$ και τ.μ. $f: \Omega \to \mathbb{R}$

$\mathcal{F}$-μετρήσιμη. Τότε η $E[f|\mathcal{G}]: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι η τ.μ. όπου

(i) είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

(ii) $\displaystyle\int_B E[f|\mathcal{G}]\,dP = \int_B f\,dP$ για κάθε $B \in \mathcal{G}$.

Α: Ύπαρξη της $E[f|\mathcal{G}]$

Έστω η $\nu: \mathcal{G} \to [0,+\infty)$ με $\nu(B) = \int_B f\,dP$. Το ν είναι μέτρο στην $\mathcal{G}$

και $\nu \ll P_{\mathcal{G}}$ όπου $P_{\mathcal{G}}$ είναι ο περιορισμός του μέτρου $P: \mathcal{F} \to [0,+\infty)$

στην $\mathcal{G}$ δηλ. $P_{\mathcal{G}}(B) = P(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{G}$

Άρα για τα $B \in \mathcal{G}$ με $P_{\mathcal{G}}(B) = P(B) = 0$ ισχύει $\nu(B) = 0 \Rightarrow \underline{\nu \ll P_{\mathcal{G}}}$

$\overset{R-N}{\Longrightarrow}$ ορίζεται η παράγωγος Radon-Nikodym $E[f|\mathcal{G}] = d\nu/dP_{\mathcal{G}}$

για κάθε $B \in \mathcal{G}$: $\nu(B) = \int_B E[f|\mathcal{G}]\, dP_{\mathcal{G}} \iff \int_B f\, dP = \int_B E[f|\mathcal{G}]\, dP$

$\nu \ll P_{\mathcal{G}}$

ok

β) Μοναδικότητα της $E[f|\mathcal{G}]$

Έστω $E[f|\mathcal{G}], E'[f|\mathcal{G}]$ $\mathcal{G}$-μετρήσιμες τ.μ. με $\int_B E[f|\mathcal{G}]\, dP = \int_B f\, dP$ $\forall B \in \mathcal{G}$

$\int_B E'[f|\mathcal{G}]\, dP = \int_B f\, dP$

Άρα $\int_B E[f|\mathcal{G}]\, dP = \int_B E'[f|\mathcal{G}]\, dP$ για κάθε $B \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow \int_B E[f|\mathcal{G}]\, dP - \int_B E'[f|\mathcal{G}]\, dP = 0 \quad \forall B \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow \int_B \left(E[f|\mathcal{G}] - E'[f|\mathcal{G}]\right) dP = 0 \quad \forall B \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow E[f|\mathcal{G}] - E'[f|\mathcal{G}] = 0$ σχεδόν παντού γιατί $E[f|\mathcal{G}] - E'[f|\mathcal{G}]$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

$\Rightarrow E[f|\mathcal{G}] = E'[f|\mathcal{G}]$ σχεδόν παντού

<u>Ιδιότητες</u> Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-υποάλγεβρα.

1. Γραμμικότητα Έστω $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. και $a, b \in \mathbb{R}$ τότε

$$E[af + bg \mid \mathcal{G}] = aE[f|\mathcal{G}] + bE[g|\mathcal{G}]$$

Απόδειξη Πρέπει να $\alpha E[f|\mathcal{G}] + b E[g|\mathcal{G}]$ είναι $\mathcal{G}$ μετρήσιμη

και ότι: $\displaystyle\int_B (\alpha E[f|\mathcal{G}] + b E[g|\mathcal{G}])\, dP = \int_B (\alpha f + b g)\, dP, \ \forall B \in \mathcal{G}$

$\because E[f|\mathcal{G}], E[g|\mathcal{G}]$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμες ως ΔΜΤ. $\Rightarrow \alpha E[f|\mathcal{G}] + b E[g|\mathcal{G}]$ είναι $\mathcal{G}$ μετρήσιμη ως γραμμικός συνδυασμός.

Για $B \in \mathcal{G}$ έχω $\displaystyle\int_B (\alpha E[f|\mathcal{G}] + b E[g|\mathcal{G}])\, dP \overset{\text{γραμ.}}{=} \alpha \int_B E[f|\mathcal{G}]\, dP + b \int_B E[g|\mathcal{G}]\, dP$

$\displaystyle\overset{\text{ορισ. ΔΜΤ}}{=} \alpha \int_B f\, dP + b \int_B g\, dP \overset{\text{γραμ.}}{=} \int_B (\alpha f + b g)\, dP$ ok.

Άρα $E[\alpha f + b g | \mathcal{G}] = \alpha E[f|\mathcal{G}] + b E[g|\mathcal{G}]$

(2) Αν $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\tau.\mu.$, $f \geq 0$ τότε $E[f|\mathcal{G}] \geq 0$ μη αρνητική τ.μ.

(3) Αν η f είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη τότε η $E[f|\mathcal{G}] = E[f]$

(4) Ανεξαρτησία Αν η f είναι ανεξάρτητη της σ-αλγ. $\mathcal{G}$ (δηλ. $\sigma(f), \mathcal{G}$ είναι ανεξάρτητες)

τότε $E[f|\mathcal{G}] = E[f]$

Απόδειξη Πρέπει να $E[f]$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη και $\displaystyle\int_B E[f]\, dP = \int_B f\, dP \ \forall B \in \mathcal{G}$

Η $E[f] \in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερά. άρα είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη.

Για $B \in \mathcal{G}$ έχω $\displaystyle\int_B E[f]\, dP = \int E[f] \chi_B\, dP = E[f] \int \chi_B\, dP = E[f] \cdot P(B)$

$$\int_B f\,dP = \int f\cdot\chi_B\,dP = E[f\cdot\chi_B] \overset{\text{ανεξαρτησία}}{=} E[f]\cdot E[\chi_B] = E[f]\cdot P(B)$$

και άρα ok....

(5) Αν f, g τμ και η f είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη τότε

$$E[f\cdot g\,|\,\mathcal{G}] = f\cdot E[g\,|\,\mathcal{G}]$$

Απόδειξη: Πρέπει να: $f\cdot E[g|\mathcal{G}]$ είναι $\mathcal{G}$ μετρήσιμη

Το οποίο ισχύει αφού γιατί f $\mathcal{G}$-μετρησ. και $E[g|\mathcal{G}]$ $\mathcal{G}$-μετρησιμη από ορισμό της ΔΜΤ

άρα $f\cdot E[g|\mathcal{G}]$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

Ακόμα θέλω για κάθε $B\in\mathcal{G}$ ισχύει $\int_B f\cdot E[g|\mathcal{G}]\,dP = \int_B f\cdot g\,dP$ ΣΜ

α) για δείκτρια. Έστω $f=\chi_A$, $A\in\mathcal{G}$ τότε.

για $B\in\mathcal{G}$ έχω $\int_B f\cdot E[g|\mathcal{G}]\,dP = \int_B \chi_A E[g|\mathcal{G}]\,dP = \int E[g|\mathcal{G}]\,\chi_A\cdot\chi_B\,dP =$

$$= \int E[g|\mathcal{G}]\,\chi_{A\cap B}\,dP = \int_{A\cap B} E[g|\mathcal{G}]\,dP \underset{\text{ΔΜΤ}}{\overset{A\cap B\in\mathcal{G}}{=}} \int_{A\cap B} g\,dP$$

$$= \int g\cdot\chi_{A\cap B}\,dP = \int (g\,\chi_A)\chi_B\,dP = \int_B g\cdot\chi_A\,dP = \int_B g f\,dP.$$

β) για μη αρνητική απλή. Έστω $f=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$, $A_i\in\mathcal{G}$ ξένα, $a_i\geq 0$

$$\int_B f\,E[g|\mathcal{G}]\,dP = \int_B E[g|\mathcal{G}]\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}\,dP = \sum_{i=1}^n a_i\int_B E[g|\mathcal{G}]\,\chi_{A_i}\,dP \overset{(α)}{=} \sum_{i=1}^n a_i\int_B g\,\chi_{A_i}\,dP =$$

$$\overset{\text{γραμ.}}{=} \int_B g \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i \chi_{A_i} \, dP = \int_B g f \, dP$$

(γ) <u>μη αρνητική τ.μ.</u> Έστω $f : \Omega \to [0, +\infty)$ $\mathcal{G}$-μετρήσιμη τ.μ. οπότε $f = \lim f_n$ (κ.σ.) (f_n) αύξουσα ακολουθία από μη αρνητικές απλές.

Άρα
$$\int_B f \cdot E[g|\mathcal{G}] \, dP = \int_B E[g|\mathcal{G}] \lim f_n \, dP \overset{\text{ΘΜΣ}}{=} \lim_n \int_B E[g|\mathcal{G}] f_n \, dP \overset{(\beta)}{=}$$
$$= \lim_n \int_B g f_n \, dP \overset{\text{ΘΜΣ}}{=} \int_B g \cdot \lim f_n \, dP = \int_B g f \, dP .$$

(δ) <u>για τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$</u> Μια τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι γράφεται $f = f^+ - f^-$, $f^+, f^- \geq 0$ τ.μ. $\mathcal{G}$-μετρήσιμες.

Άρα
$$\int_B f E[g|\mathcal{G}] \, dP = \int_B (f^+ - f^-) E[g|\mathcal{G}] \, dP = \int_B f^+ E[g|\mathcal{G}] - f^- E[g|\mathcal{G}] \, dP$$
$$\overset{\text{γραμ.}}{=} \int_B f^+ E[g|\mathcal{G}] \, dP - \int_B f^- E[g|\mathcal{G}] \, dP \overset{(\gamma)}{=}$$
$$= \int_B g f^+ \, dP - \int_B g f^- \, dP \overset{\text{γραμ.}}{=} \int_B g (f^+ - f^-) \, dP = \int_B g f \, dP .$$

(6) <u>ΘΔΜΤ</u> $\quad E[f] = E[E[f|\mathcal{G}]]$

(7) <u>Ιδιότητα</u> του Πύργου. Αν $\mathcal{H}$ σ-υποάλγεβρα της $\mathcal{G}$ δηλ. $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

Τότε $\quad E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[f|\mathcal{H}]$

2 Ενδεικτικά θέματα

Πρόβλημα 1

→ Ρίψη νομίσματος 2 φορές όλα $\Omega = \{KK, KΓ, ΓK, ΓΓ\}$

→ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

και 2 μέτρα πιθανότητας:
- $P_{KK} = P_{KΓ} = P_{ΓK} = P_{ΓΓ} = \frac{1}{4}$ δίκαιο νόμισμα ανεξ. ρίψεις
- $Q_{KK} = Q_{ΓΓ} = \frac{3}{10}$, $Q_{KΓ} = Q_{ΓK} = \frac{1}{5}$

(α) Εξετάστε αν τα P, Q είναι ισοδύναμα

(β) Να βρ. η παρ. R-N $f = \frac{dQ}{dP}$

(γ) Να βρ. η $E(1/f)$ ως προς το μ.π. Q. Δηλ. $E(1/f) = \int 1/f \, dQ$.

__Λύση__ (α) Είναι ισοδύναμα γιατί $P(\emptyset) = 0 \iff Q(\emptyset) = 0$

και για κάθε $A \neq \emptyset$ ισχύει $P(A) > 0$, $Q(A) > 0$.

Άρα τα μέτρα είναι ισοδύναμα.

$$\left.\begin{array}{l} P \ll Q \text{ γιατί } A=\emptyset \text{ έχω } Q(A)=0 \Rightarrow P(\emptyset) = 0 \\ Q \ll P \text{ γιατί για } A=\emptyset \text{ έχω } P(A)=0 \Rightarrow Q(\emptyset) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=0 \iff Q(A)=0$$

(β) Επειδή $Q \ll P$ ορίζεται η παράγωγος Radon-Nikodym $f = \frac{dQ}{dP} : \Omega \to \mathbb{R}$

μετρήσιμη τ.μ. τέτοια ώστε $Q(A) = \int_A f \, dP$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$.

για $A = \{KK\}$ έχω $Q(\{KK\}) = \int_{\{KK\}} f \, dP = \int f \chi_{\{KK\}} \, dP = \int f(KK) \chi_{\{KK\}} \, dP = f(KK) \int \chi_{\{KK\}} \, dP$

$$Q(kk) = f(kk)\,P(kk) \Rightarrow f(kk) = \frac{Q_{kk}}{P_{kk}} = \frac{6}{5} = f(rr)$$

עכשיו עבור $A = \{kr\}$

$$Q(kr) = \int_{\{kr\}} f\,dP = \int f\,\chi_{\{kr\}}\,dP = \int f(kr)\,\chi_{\{kr\}}\,dP = f(kr)\int \chi_{\{kr\}}\,dP = f(kr)\,P_{kr}$$

$$\Rightarrow f(kr) = \frac{Q_{kr}}{P_{kr}} = \frac{4}{5} = f(rk)$$

(ג) $E_Q\left[\frac{1}{f}\right] = \int \frac{1}{f}\,dQ = \int \frac{dP}{dQ}\,dQ = \int dP = 1.$

$\frac{1}{f} = \frac{dP}{dQ}$ כי נגזרת R.N מקיימת הופכיות כאשר המידות שקולות P, Q

Πρόβλημα 2 → Ρίχνω 2 ζάρια διαδοχικά.

→ $\Omega = \{(i,j) : 1 \le i,j \le 6\}$

→ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

→ μ.π. P : $P(i,j) = \frac{1}{36}$ δίκαιο ζάρι - ανεξαρτησία.

Θεωρώ τις τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $f(i,j) = \max\{i,j\}$ μεγ. ένδειξη

$g : \Omega \to \mathbb{R}$ με $g(i,j) = j$: ένδειξη του 2ου ζαριού.

(α) Να βρεθεί η $E[g|f]$.

(β) $E[g] = ;$

Λύση Βήμα 1ο: Γράφω την f ως απλή για να βρω τα σύνολα της διαμέρισης $B_1, B_2, \ldots$

Βήμα 2ο: Βρίσκω $E[g|B_i]$.

Βήμα 3ο: Γράφω την $E[g|f]$

$$f(i,j) = \max\{i,j\} = \begin{cases} 1 & \omega \in B_1 = \{(1,1)\} \\ 2 & \omega \in B_2 = \{(1,2),(2,1),(2,2)\} \\ 3 & \omega \in B_3 = \{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1)\} \\ 4 & \omega \in B_4 = \{(1,4),\ldots,(4,1)\} \\ 5 & \omega \in B_5 = \{(1,5),\ldots,(5,1)\} \\ 6 & \omega \in B_6 = \{(1,6),\ldots,(6,1)\} \end{cases}$$

$P(B_1) = \frac{1}{36}$

$P(B_2) = \frac{3}{36}$

$P(B_3) = \frac{5}{36}$

$P(B_4) = 7/36$

$P(B_5) = 9/36$

$P(B_6) = 11/36$

Τα $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ είναι διαμέριση του Ω.

$$f = 1\cdot\chi_{B_1} + 2\cdot\chi_{B_2} + 3\chi_{B_3} + 4\chi_{B_4} + 5\chi_{B_5} + 6\chi_{B_6}$$

אז

$$E[g|f] = \begin{cases} E[g|B_1], & w\in B_1 \\ E[g|B_2], & w\in B_2 \\ E[g|B_3], & w\in B_3 \\ E[g|B_4], & w\in B_4 \\ E[g|B_5], & w\in B_5 \\ E[g|B_6], & w\in B_6 \end{cases}$$

$$E[g|B_i] =: $$

$$E[g|B_1] = \frac{1}{P(B_1)}\int_{B_1} g\,dP = \frac{1}{1/36}\int g\chi_{B_1}\,dP = 36\int g(1,1)\chi_{\{1,1\}}\,dP$$

$$= 36\cdot g(1,1)\cdot P(1,1) = 36\cdot 1\cdot\frac{1}{36} = 1.$$

$$E[g|B_2] = \frac{1}{P(B_2)}\int_{B_2} g\,dP = \frac{1}{3/36}\int g\chi_{B_2}\,dP = \frac{36}{3}\cdot\int g(1,2)\chi_{(1,2)} + g(2,2)\chi_{(2,2)} + g(2,1)\chi_{(2,1)}\,dP$$

$$= \frac{36}{3}\left(g(1,2)P(1,2) + g(2,2)P(2,2) + g(2,1)P(2,1)\right)$$

$$= \frac{36}{3}\left(2\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{1}{36} + 1\cdot\frac{1}{36}\right) = \frac{5}{3}.$$

אז [illegible]. $E[g|f] = 1\chi_{B_1} + \frac{5}{3}\chi_{B_2} + b_3\chi_{B_3} + b_4\chi_{B_4} + b_5\chi_{B_5} + b_6\chi_{B_6}$

$$E[g] \overset{\text{OSM7}}{=} E[E[g|f]] = E[1\chi_{B_1} + \frac{5}{3}\chi_{B_2} + b_3\chi_{B_3} + b_4\cdot\chi_{B_4} + b_5\chi_{B_5} + b_6\chi_{B_6}] =$$

$$= 1 \cdot P(B_1) + \frac{5}{3} \cdot P(B_2) + b_3 P(B_3) + \dots + b_6 P(B_6).$$