ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

Απαντήσεις στα θέματα της εξέτασης της 9/9/2022

Θέμα 1$^{\text{ον}}$ Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=x^{y^x}$, ορισμένη για $x>0$ και $y>0$. Είναι σωστό ότι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,2)>2^2\cdot 3^{3^2}\ ;$$

Απάντηση. Γράφοντας $f(x,y)=x^{y^x}=e^{y^x\log x}=e^{e^{x\log y}\log x}$, βρίσκουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^{y^x}\,\frac{\partial(e^{x\log y}\log x)}{\partial y}=x^{y^x}\,\frac{\partial(y^x)}{\partial y}\cdot\log x=x^{y^x}\cdot xy^{x-1}\cdot\log x$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,2)=3^{2^3}\cdot 3\cdot 2^2\cdot\log 3=2^2\cdot 3^{3^2}\cdot\log 3>2^2\cdot 3^{3^2}.$$

Θέμα 2$^{\text{ον}}$ Αποδείξτε ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός $\alpha\neq 0$ έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(t,x,y)=\frac{1}{t}e^{(x^2+y^2)/(\alpha t)},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ t>0,$$

να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

και βρείτε τον αριθμό αυτόν.

Απάντηση. Υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{1}{t^2}e^{(x^2+y^2)/(\alpha t)}-\frac{x^2+y^2}{\alpha t^3}e^{(x^2+y^2)/(\alpha t)},\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{\alpha t^2}e^{(x^2+y^2)/(\alpha t)},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2}{\alpha t^2}e^{(x^2+y^2)/(\alpha t)}+\frac{4x^2}{\alpha^2 t^3}e^{(x^2+y^2)/(\alpha t)},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2}{\alpha t^2}e^{(x^2+y^2)/(\alpha t)}+\frac{4y^2}{\alpha^2 t^3}e^{(x^2+y^2)/(\alpha t)}$$

και

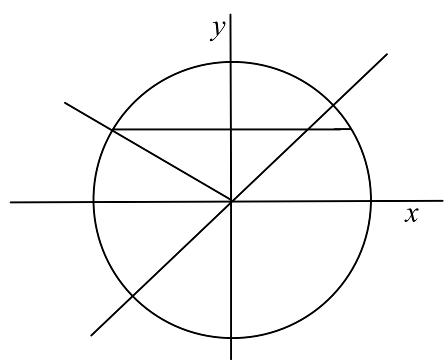
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{4}{\alpha t^2}e^{(x^2+y^2)/(\alpha t)}+\frac{4(x^2+y^2)}{\alpha^2 t^3}e^{(x^2+y^2)/(\alpha t)}.$$

Άρα η διαφορική εξίσωση ισχύει όταν $\alpha=-4$.

Θέμα 3$^{\text{ον}}$ Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{K}} x\,dx\,dy$, όπου

$$\mathrm{K}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 4,\ x\leq y\leq 1,\ x\leq 0\}.$$

Απάντηση.



Με ένα καλό σχήμα του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$, των ευθειών $y = 1$ και $y = x$, καθώς και της ημιευθείας $\theta = 5\pi/6$, βρίσκουμε ότι

$$\iint_K x dx dy = \int_{\theta=5\pi/6}^{5\pi/4} \left(\int_{r=0}^{2} r\cos\theta dr \right) d\theta + \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=-y\sqrt{3}/2}^{0} x dx \right) dy$$

$$= 2[\sin(5\pi/4) - \sin(5\pi/6)] - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \int_{y=0}^{1} y^2 dy$$

$$= 2\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] - \frac{3}{16}.$$

Θέμα 4ον Στον $xyz -$χώρο, θεωρήστε την καμπύλη Γ που είναι η τομή του ημισφαιρίου με εξίσωση $z = \sqrt{4\alpha^2 - x^2 - y^2}$ και του κυλίνδρου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 2\alpha x$ (όπου $\alpha > 0$). Αποδείξτε ότι το μήκος της Γ δίδεται από ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\mathrm{A}\alpha \int_{u=0}^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u} du,$$

όπου A είναι ένας θετικός ακέραιος, και υπολογίστε τον αριθμό αυτόν.

Απάντηση. Στο $xy -$επίπεδο, ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2\alpha x$ περιγράφεται παραμετρικά από τις εξισώσεις:

$$x = \alpha + \alpha\cos t, \; y = \alpha\sin t, \; 0 \le t \le 2\pi.$$

Άρα μια παραμέτρηση της καμπύλης Γ είναι η εξής: Για $0 \le t \le 2\pi$,

$$x = \alpha + \alpha\cos t, \; y = \alpha\sin t, \text{ και } z = \sqrt{4\alpha^2 - (\alpha + \alpha\cos t)^2 - (\alpha\sin t)^2} = 2\alpha\sin(t/2).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο

$$\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma(\Gamma) = \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2} dt,$$

βρίσκουμε

$$\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma(\Gamma) = \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{(-\alpha\sin t)^2 + (\alpha\cos t)^2 + [\alpha\cos(t/2)]^2} dt = \alpha \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(t/2)} dt = 2\alpha \int_{u=0}^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u} du,$$

δηλαδή $\mathrm{A} = 2$.

Θέμα 5ον Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = x^y \left(\frac{y\cos x}{x} - \sin x \right) \vec{i} + (x^y \log x \cos x) \vec{j} + \log(z + 5) \vec{k},$$

ορισμένο για $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ με $x > 0$ και $z > -5$, και την καμπύλη γ με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = 2 + \cos t, \; y = 3 + 2\sin t, \; z = t(1 - \cos t) + 5\sin t, \; 0 \le t \le 2\pi,$$

και υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Απάντηση. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\vec{F} = \vec{\nabla}[x^y \cos x + (z + 5)\log(z + 5) - z],$$

δηλαδή το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό, εννοείται στο σύνολο των $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ με $x > 0$ και $z > -5$. Επίσης η καμπύλη γ ευρίσκεται στο σύνολο αυτό και είναι κλειστή. Άρα

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$