Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1 [1,5 βαθμοί]: Βρείτε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $P(x,y)$ που ικανοποιεί

$$\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x^2+y) - P(x,y)}{x^2+(y-\pi)^2} = 0.$$

Θέμα 2 [1,5 βαθμοί]: Προσδιορίστε τα ολικά ακρότατα του περιορισμού της συνάρτησης $f(x,y,z) = x + yz$ στη μοναδιαία σφαίρα

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

Θέμα 3 [2 βαθμοί]: Θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} \leq 3\} \ \text{ με } \alpha, \beta, \gamma > 0 \text{ σταθερές.}$$

(α) Υπολογίστε τον όγκο του E.

(β) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο (α, β, γ) της επιφάνειας ∂E.

Θέμα 4 [2 βαθμοί]: Θεωρούμε μια συνάρτηση $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ και την επιφάνεια

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = f(x,y), \ (x,y) \in D\},$$

όπου το $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα στοιχειώδες χωρίο.

(α) Δείξτε ότι $dS = \sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2}\, dxdy$.

(β) Υπολογίστε το εμβαδόν την επιφάνειας S όταν $f(x,y) = x^2+y^2$ και $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

Θέμα 5 [3 βαθμοί]: Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $I_1 = \iint_D e^{x^3} dxdy$ όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$,

(β) $I_2 = \iiint_K x\, dxdydz$ και (γ) $I_3 = \iiint_K z\, dxdydz$

όπου $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z, \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Κυλινδρικές συντεταγμένες: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $dxdydz = r dr\, d\theta\, dz$.

Σφαιρικές συντεταγμένες: $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$, $dxdydz = \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$.

Θέμα 1

Άσκ 4 Να βρεθεί το πολυώνυμο $P_2(x_1, x_2)$ δευτέρου βαθμού τ.ω.

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x_1^2+x_2) - P_2(x_1,x_2)}{x_1^2+(x_2-\pi)^2} = 0$$

Έστω $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2+x_2)$

Λύση Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το πολυώνυμο του Taylor δευτέρου βαθμού της f στο σημείο $(0,\pi)$. Υπολογίζουμε λοιπόν

$f(0,\pi) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 2x_1\cos(x_1^2+x_2)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,\pi) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \cos(x_1^2+x_2)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,\pi) = -1$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = 2\cos(x_1^2+x_2) - 4x_1^2\sin(x_1^2+x_2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,\pi) = -2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = -2x_1\sin(x_1^2+x_2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,\pi) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = -\sin(x_1^2+x_2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,\pi) = 0$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο είναι

$$P_2(x_1,x_2) = 0 + 0(x_1-0) - 1(x_2-\pi) + \frac{1}{2}\left[-2(x_1-0)^2 + 2\cdot 0(x_1-0)(x_2-\pi) + 0(x_2-\pi)^2\right]$$

$$= -x_2 + \pi - x_1^2$$

Θέμα 2: Έστω $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Έχουμε $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ και $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix}1\\z\\y\end{pmatrix}$ ενώ $\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix} \neq \vec{0}$, $\forall (x,y,z) \in \Sigma$.

Επειδή η σφαίρα Σ είναι συμπαγής και $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, γνωρίζουμε ότι η $f|_\Sigma$ λαμβάνει το μέγιστό της σε ένα σημείο $\vec{a} \in \Sigma$ και το ελάχιστό της σε ένα σημείο $\vec{b} \in \Sigma$.

Γνωρίζουμε επίσης από το Θεώρημα του πολλαπλασιαστή Lagrange ότι οι πιθανές θέσεις των ολικών ακροτάτων της $f|_\Sigma$ είναι τα σημεία $(x,y,z) \in \Sigma$ όπου $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix}1\\z\\y\end{pmatrix} \parallel \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$.

Λύνοντας τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 1 = 2\lambda x \\ z = 2\lambda y \\ y = 2\lambda z \end{cases} \quad \text{για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R},$$

διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Αν $z=0$, τότε $y = 2\lambda z = 0$, άρα $x = \pm 1$ (επειδή $x^2+y^2+z^2=1$)

2) Αν $z \neq 0$, τότε $z = 2\lambda y = 2\lambda(2\lambda z) \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \Rightarrow 4\lambda^2 = 1$
$\Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda} = \pm 1$

Άρα $y=z=0$ και η περίπτωση αυτή είναι λοιπόν αδύνατη.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι θέσεις των ολικών ακροτάτων είναι τα σημεία $(\pm 1, 0, 0)$. Επειδή $f(1,0,0) = 1$ και $f(-1,0,0) = -1$, η $f|_\Sigma$ έχει ολικό μέγιστο στο $\vec{a} = (1,0,0)$ και ολικό ελάχιστο στο $\vec{b} = (-1,0,0)$.

Θέμα 3 (α) Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό $T = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$T(u,v,w) = (\alpha u, \beta v, \gamma w) = (x,y,z)$ με $DT(u,v,w) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$

και $\det(DT(u,v,w)) = \alpha\beta\gamma$. Έχουμε λοιπόν $E = T(\overline{B(0,\sqrt{3})})$

όπου $\overline{B(0,\sqrt{3})} = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2+v^2+w^2 \leq 3\}$, επειδή

$u = \frac{x}{\alpha}$, $v = \frac{y}{\beta}$, $w = \frac{z}{\gamma}$ και $u^2+v^2+w^2 \leq 3 \iff \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} \leq 3$.

Άρα, όγκος$(E) = \iiint_E dx\,dy\,dz = \iiint_{\overline{B(0,\sqrt{3})}} |\det(DT(u,v,w))|\,du\,dv\,dw$

$$= (\alpha\beta\gamma)\cdot \text{όγκος}\,(\overline{B(0,\sqrt{3})}) = \frac{4}{3}\pi 3^{3/2}\alpha\beta\gamma. = 4\sqrt{3}\pi\alpha\beta\gamma$$

(β) Η επιφάνεια ∂E (= σύνορο του E) είναι το σύνολο στάθμης της συνάρτησης

$f(x,y,z) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}$ για την τιμή $c=3$. Έχουμε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

και $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2x}{\alpha^2}, \frac{2y}{\beta^2}, \frac{2z}{\gamma^2}\right) \neq \vec{0}$, $\forall (x,y,z) \neq \vec{0}$.

Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \partial E$ έχει

εξίσωση $\nabla f(\alpha,\beta,\gamma) \cdot \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \\ z-\gamma \end{pmatrix} = 0$

$\iff \frac{2}{\alpha}(x-\alpha) + \frac{2}{\beta}(y-\beta) + \frac{2}{\gamma}(z-\gamma) = 0$

$\iff \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 3$

ΑΣΚ 4 Έστω $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ κλάσεως C^1 στο $\mathring{D}$ και
$S = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$ το γράφημα της f.
Να βρεθεί το στοιχείο εμβαδού dS της επιφάνειας S.

Λύση: Θεωρούμε την παραμέτρηση του S: $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

Έχουμε $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ και

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα $dS = \left\| \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \times \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) \right\| dx\,dy = \sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2}\, dx\,dy$.

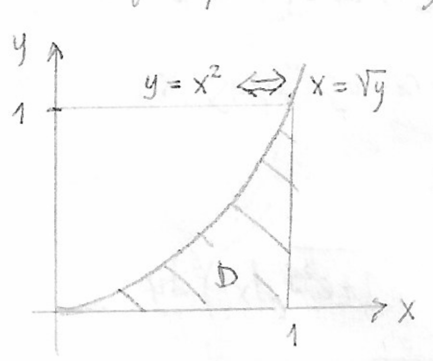
(β) Όταν $f(x,y) = x^2 + y^2$, υπολογίζουμε $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$,
$\|\nabla f(x,y)\|^2 = 4(x^2+y^2)$ και $dS = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx\,dy$.
Άρα, όταν $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, έχουμε

$$\text{εμβαδόν}(S) = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx\,dy \underset{\text{πολικές συντεταγμένες}}{=} \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} r\sqrt{1+4r^2}\, dr\, d\theta$$

$$\overset{\text{(Fubini)}}{=} 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\, dr = 2\pi \left[\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right)$$

Θέμα 5 (α)

4.) Ομοίως, αν $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,1],\ \sqrt{y}\le x\le 1\}$, για να υπολογίσουμε το $I=\iint_D e^{x^3}\,dx\,dy$, παρατηρούμε ότι το D είναι επίσης

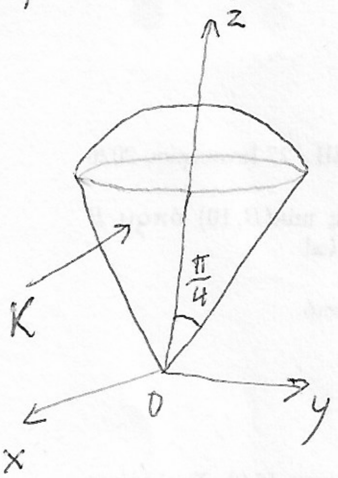


ένα y-χωρίο $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1],\ 0\le y\le x^2\}$

και έχουμε

$$I=\int_0^1\Big(\underbrace{\int_0^{x^2} e^{x^3}\,dy}_{\left[e^{x^3}y\right]_{y=0}^{y=x^2}=x^2e^{x^3}}\Big)dx=\int_0^1 x^2e^{x^3}\,dx=\left[\frac{e^{x^3}}{3}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{e-1}{3}.$$

Θέμα 5 (β)-(γ)



Στις σφαιρικές συντεταγμένες

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\varphi$$

$$dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

το χωρίο K οριοθετείται ως εξής:

$$K = \{(\rho,\theta,\varphi) : \rho \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi],\ \varphi \in [0,\tfrac{\pi}{4}]\}$$

Άρα έχουμε

$$(\gamma)\quad I_3 = \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \overbrace{\rho\cos\varphi}^{=z}\ \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\cos\varphi \sin\varphi}_{=\frac{1}{2}\sin 2\varphi} \, d\varphi\right)$$

$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \cdot 2\pi \left[\frac{-\cos 2\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

(γ) Επειδή το χωρίο K είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο Oyz και η συνάρτηση $(x,y,z) \mapsto x$ είναι περιττή ως προς το επίπεδο Oyz βλέπουμε ότι $I_2 = 0$. Μπορούμε να το δείξουμε και με πράξεις:

$$I_2 = \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \overbrace{\rho\sin\varphi\cos\theta}^{=x}\ \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \underset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho\right)\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta\right)}_{=0}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi \, d\varphi\right) = 0$$