

ΚΕΦ 6 : ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

① Παραμετρικές καμπύλες στο $\mathbb{R}^n$ ($n=2,3$)

Ορ: Μία παραμετρική καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$ ($n=2,3$) είναι μία συνεχής συνάρτηση
 $\vec{\gamma}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Το ίχνος της καμπύλης είναι το σύνολο $\vec{\gamma}(I) \subset \mathbb{R}^n$.
Διάστημα

→ Σε ό,τι ακολουθεί, θεωρούμε καμπύλες ορισμένες στο $I = [a,b]$ και κλάσως C^1 στο $[a,b]$ ή τμηματικά C^1 στο $[a,b]$: αυτό σημαίνει ότι $\exists t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b$ π.ω. $\vec{\gamma} \in C^1([t_{i-1}, t_i]; \mathbb{R}^n)$, $\forall i=1, \dots, k$.
 Στα σημεία t_i , οι πλευρικές παράγωγοι της γ υπάρχουν αλλά διαφέρουν



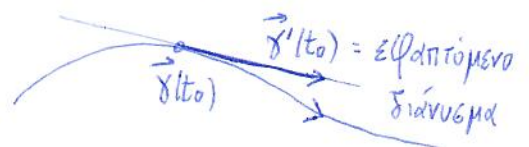
• Στη Φυσική:

$H: t \mapsto \vec{\gamma}(t)$ μπορεί να είναι η τροχιά ενός υλικού σημείου:

$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$: Θέση του σημείου στο χρόνο t , $\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$: ταχύτητα του σημείου στο χρόνο t .

• Αν $\vec{\gamma} \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^n)$, τότε σε κάθε σημείο $\vec{\gamma}(t_0)$ ($t_0 \in [a,b]$) όπου $\vec{\gamma}'(t_0) \neq \vec{0}$, η καμπύλη έχει μία εφαπτόμενη ευθεία με εξίσωση:

$$\vec{\ell}(t) = \vec{\gamma}(t_0) + \vec{\gamma}'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

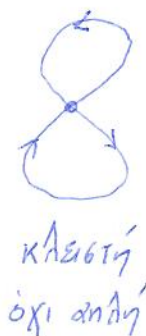
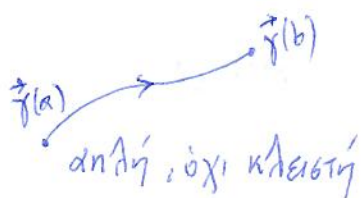


Ορ: Μία καμπύλη $\vec{\gamma}: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται

• κλειστή, αν $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$

• απλή, αν η $\vec{\gamma}$ είναι 1-1 στο $[a,b]$

• απλή κλειστή, αν $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$ και η γ είναι 1-1 στο $[a,b]$



Παρατήρηση : Κάθε αηλγή κλειστή καμπύλη $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ χωρίζει το $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a, b])$ σε δύο ανοιχτά σύνολα : ένα φραγμένο που συμβολίζεται με $\text{int}(\vec{\gamma})$ και αποτελείται από τα σημεία που εγκλείει η καμπύλη και ένα μη φραγμένο που συμβολίζεται με $\text{ext}(\vec{\gamma})$.

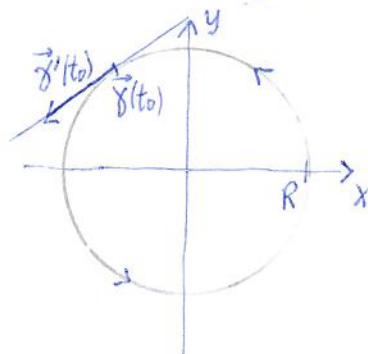
Παραδείγματα : 1) Η $\vec{\gamma}(t) = \vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})$, με $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ($n=2,3$) και $t \in [0,1]$, διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $[\vec{x}, \vec{y}]$. Είναι αηλγή καμπύλη.



2) Η $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, διαγράφει τον κύκλο ακτίνας R με κέντρο το $\vec{0}$. Είναι αηλγή κλειστή καμπύλη.

Στο σημείο $\vec{\gamma}(t_0)$, έχει μία εφαπτομένη ευθεία

με εξίσωση $\vec{\ell}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t_0 \\ R \sin t_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \sin t_0 \\ R \cos t_0 \end{pmatrix} (t - t_0)$



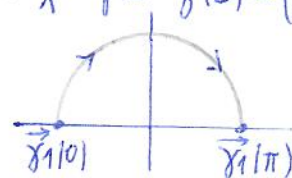
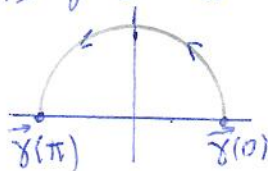
3) Η $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 4\pi]$, διαγράφει δύο φορές τον μοναδιαίο κύκλο. Είναι κλειστή, όχι αηλγή.



Def : Έστω μία καμπύλη $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n=2,3$) και $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$, C^1 , 1-1 και επί. Τότε, η καμπύλη $\vec{\gamma}_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{\gamma}_1(t) = \vec{\gamma}(\varphi(t))$ λέγεται αναπαράμετρηση της $\vec{\gamma}$. Επιπλέον, ισχύει $\vec{\gamma}([a, b]) = \vec{\gamma}_1([a_1, b_1])$

και η $\vec{\gamma}_1$ διατηρεί τον προσανατολισμό της $\vec{\gamma}$ όταν η φ είναι αύξουσα
ενώ η $\vec{\gamma}_1$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό της $\vec{\gamma}$ όταν η φ είναι φθίνουσα.

Παραδείγματα: 1) Η αναπαράμετρησή $\vec{\gamma}_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{\gamma}_1(t) = \vec{\gamma}(a+b-t)$
αντιστρέφει τον προσανατολισμό της $\vec{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Π.χ. για $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$,
με $[a, b] = [0, \pi]$, έχουμε



2) Η αναπαράμετρησή $\vec{\gamma}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{\gamma}_1(t) = \vec{\gamma}(a+t(b-a))$ διατηρεί
τον προσανατολισμό της $\vec{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση: Αποδεικνύεται ότι οποιεσδήποτε ^{δύο} απλές (ή απλές κλειστές)
καμπύλες $\vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma}_1$ με το ίδιο ίχνος είναι αναπαράμετρήσιμες η μία της άλλης.

(2) Επικαμπύδια ολοκληρώματα του είδους

Ορ: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ($n=2,3$) και $\vec{\gamma}: [a,b] \rightarrow U, C^1$ ή
τμηματικά C^1 . Το ολοκλήρωμα του είδους της f κατά μήκος της καμπύλης $\vec{\gamma}$

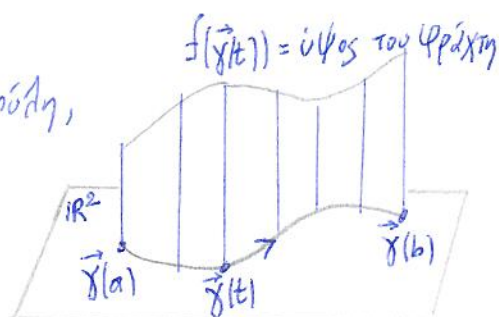
$$\text{είναι το } \int_{\vec{\gamma}} f ds = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$$

Σχόλια 1) $\int_{\vec{\gamma}} f ds = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$ αν η $\vec{\gamma}$ είναι τμηματικά C^1 .

2) Το $ds = \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$ είναι το στοιχείο μήκους της παραμετρικής καμπύλης $\vec{\gamma}$.
(μήκος = ταχύτητα x χρόνος)

3) Γεωμετρική ερμηνεία: Αν $n=2$, $f > 0$ και $\vec{\gamma}$ = απλή καμπύλη,

τότε $\int_{\vec{\gamma}} f ds = \text{εμβαδόν του φράχτη}$:



4) Ειδικότερα, αν $f \equiv 1$, τότε το $L(\vec{\gamma}) = \int_{\vec{\gamma}} ds = \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$ [ολοκλήρωμα
της ταχύτητας]
είναι το μήκος της διαδρομής $\vec{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Πρόταση: Έστω $\vec{\gamma}_1: [a_1, b_1] \rightarrow U$ μία αναπαράμετρηση της $\vec{\gamma}$ της ίδιας
ή αντίθετης φοράς. Τότε $\int_{\vec{\gamma}} f ds = \int_{\vec{\gamma}_1} f ds$

Απ: Έχουμε $\vec{\gamma}_1(t) = \vec{\gamma}(\varphi(t))$ με $\varphi: [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$, C^1 , 1-1 και επί.

Αρα, είτε η φ είναι αύξουσα και $\varphi(a_1) = a$, $\varphi(b_1) = b$, είτε η φ είναι φθίνουσα
και $\varphi(a_1) = b$, $\varphi(b_1) = a$. Επιπλέον, ισχύει $\vec{\gamma}'_1(t) = \varphi'(t) \cdot \vec{\gamma}'(\varphi(t))$
 $\uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\mathbb{R}^n \quad \quad \quad \mathbb{R} \quad \quad \quad \mathbb{R}^n$

Επομένως,

$$\int_{\vec{\gamma}_1} f ds = \int_{a_1}^{b_1} f(\vec{\gamma}_1(t)) \|\vec{\gamma}'_1(t)\| dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\vec{\gamma}(\varphi(t))) \|\vec{\gamma}'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt$$

και θέτοντας $\tau = \varphi(t)$, έχουμε

$$\bullet \text{ όταν } \varphi' \geq 0: \int_{\vec{\gamma}_1} f ds = \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} f(\vec{\gamma}(\tau)) \|\vec{\gamma}'(\tau)\| d\tau = \int_a^b f(\vec{\gamma}(\tau)) \|\vec{\gamma}'(\tau)\| d\tau = \int_{\vec{\gamma}} f ds$$

$$\bullet \text{ όταν } \varphi' \leq 0: \int_{\vec{\gamma}_1} f ds = - \int_{\varphi(b_1)}^{\varphi(a_1)} f(\vec{\gamma}(\tau)) \|\vec{\gamma}'(\tau)\| d\tau = \int_a^b f(\vec{\gamma}(\tau)) \|\vec{\gamma}'(\tau)\| d\tau = \int_{\vec{\gamma}} f ds$$

Παράδειγμα: 1) Έστω η ελικοειδής $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ και

έστω $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Θα υπολογίσουμε το $\int_{\vec{\gamma}} f ds$. Παρατηρούμε

πρώτα ότι $\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$ και

$$f(\vec{\gamma}(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2. \text{ Αρα,}$$

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} f ds &= \int_0^{2\pi} f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2) \end{aligned}$$

2) Θα υπολογίσουμε το μήκος της διαδρομής $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$,

δηλαδή την περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας R . Έχουμε

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{\gamma}'(t)\| = R. \text{ Άρα, το μήκος της διαδρομής } \vec{\gamma}$$

$$\text{είναι } L(\vec{\gamma}) = \int_{\vec{\gamma}} ds = \int_0^{2\pi} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = 2\pi R.$$

Αν επιτρέπουμε $0 \leq t \leq 4\pi$, η διαδρομή θα διέγραφε τον κύκλο δύο

φορές και το μήκος της θα ήταν $4\pi R$.

Ιδιότητες: Έστω $f, g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς ($n=2,3$), $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

και $\vec{\gamma}: [a,b] \rightarrow U$, C^1 ή τμηματικά C^1 . Τότε

$$(i) \int_{\vec{\gamma}} (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_{\vec{\gamma}} f ds + \mu \int_{\vec{\gamma}} g ds$$

$$(ii) f \leq g \text{ στο } U \Rightarrow \int_{\vec{\gamma}} f ds \leq \int_{\vec{\gamma}} g ds$$

$$\text{και ειδικότερα ισχύει } \left| \int_{\vec{\gamma}} f ds \right| \leq \int_{\vec{\gamma}} |f| ds \leq \max_{\vec{\gamma}([a,b])} |f| \underbrace{L(\vec{\gamma})}_{=\text{μήκος της διαδρομής}}$$

③ Επικαμπύδια ολοκληρώματα 2ου είδους

Ορ: Έστω $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο και $(n=2,3)$

$\vec{\gamma}: [a,b] \rightarrow U$, C^1 ή τμηματικά C^1 . Το ολοκλήρωμα 2ου είδους του

διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ κατά μήκος της καμπύλης $\vec{\gamma}$ είναι το

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt$$

↑
εσωτερικό γινόμενο

Σχόλια 1) $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt$ αν η $\vec{\gamma}$ είναι τμηματικά C^1 .

2) Αν $n=3$ και $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, έχουμε

$$\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) = P(\vec{\gamma}(t)) \frac{dx}{dt}(t) + Q(\vec{\gamma}(t)) \frac{dy}{dt}(t) + R(\vec{\gamma}(t)) \frac{dz}{dt}(t) \text{ και το } \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

συμβολίζεται επίσης $\int_{\vec{\gamma}} P dx + Q dy + R dz$ [Ανάλογος συμβολισμός όταν $n=2$]

3) Στη φυσική, το $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ερμηνεύεται ως το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}$ καθώς το σημείο εφαρμογής της μετακινείται κατά μήκος της καμπύλης $\vec{\gamma}$.

Πρόταση: Έστω $\vec{\gamma}_1 = [a_1, b_1] \rightarrow U$ μία αναπαράμετρηση της $\vec{\gamma}$.

• Αν η $\vec{\gamma}_1$ διατηρεί τον προσανατολισμό της $\vec{\gamma}$, τότε $\int_{\vec{\gamma}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

• Αν η $\vec{\gamma}_1$ αντιστρέφει " " " " , τότε $\int_{\vec{\gamma}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Απ: Έχουμε $\vec{\gamma}_1(t) = \vec{\gamma}(\varphi(t))$, με $\varphi = [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$, C^1 , 1-1 και επί.

Ήδη, είτε η φ είναι αύξουσα και $\varphi(a_1) = a$, $\varphi(b_1) = b$, είτε η φ είναι φθίνουσα και $\varphi(a_1) = b$, $\varphi(b_1) = a$. Επομένως, ισχύει $\vec{\gamma}_1'(t) = \varphi'(t) \vec{\gamma}'(\varphi(t))$. Επομένως

$$\int_{\vec{\gamma}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{a_1}^{b_1} \vec{F}(\vec{\gamma}_1(t)) \cdot \vec{\gamma}_1'(t) dt = \int_{a_1}^{b_1} (\vec{F}(\vec{\gamma}(\varphi(t))) \cdot \vec{\gamma}'(\varphi(t))) \varphi'(t) dt \text{ και θέτοντας}$$

$\tau = \varphi(t)$, έχουμε

• όταν $\varphi' \geq 0$: $\int_{\vec{\gamma}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} \vec{F}(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \vec{\gamma}'(\tau) d\tau = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \vec{\gamma}'(\tau) d\tau = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

• όταν $\varphi' \leq 0$: $\int_{\vec{\gamma}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} \vec{F}(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \vec{\gamma}'(\tau) d\tau = \int_b^a \vec{F}(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \vec{\gamma}'(\tau) d\tau = - \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Παράδειγμα 1 1) Έστω $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in [0,1]$

Θα υπολογίσουμε το $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$. Υπολογίσουμε πρώτα $\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) = F(t, t^2, 1) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) = t^2 + 2t^4$. Άρα

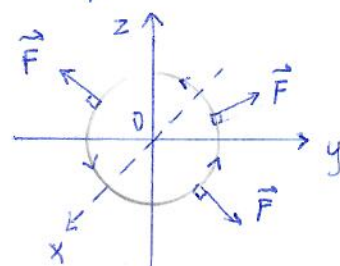
$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^4) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{11}{15}$$

2) Έστω $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi], R > 0$.

Υπολογίσουμε $\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}$ και $\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) = F(0, R \cos t, R \sin t) = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}$

Έχουμε $\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) = 0, \forall t \in [0, 2\pi]$, διότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι κάθετο στον κύκλο που διαγράφει η $\vec{\gamma}$.

Άρα $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

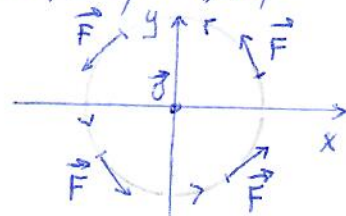


3) Έστω $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ και $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$.

Έχουμε $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \mathbb{R}^2)$, $\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ και

$$\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) = \vec{F}(\cos t, \sin t) = \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) = (-\sin t, \cos t) = \vec{\gamma}'(t).$$

$$\text{Άρα } \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)}_{=1} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$



Ιδιότητες: Έστω $\vec{F}, \vec{G}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχείς, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\vec{\gamma}: [a,b] \rightarrow U$, C^1 ή τμηματικά C^1 . Τότε

$$(i) \int_{\vec{\gamma}} (\lambda \vec{F} + \mu \vec{G}) \cdot d\vec{s} = \lambda \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \mu \int_{\vec{\gamma}} \vec{G} \cdot d\vec{s} \quad (ii) \left| \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \right| \leq \int_{\vec{\gamma}} \|\vec{F}\| ds$$

(iii) Αν $\vec{F} = \nabla f$ με $f \in C^1(U)$ ισχύει $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a))$

[Δηλαδή, το ολοκλήρωμα ενός συντηρητικού διανυσματικού πεδίου (= πεδίου κλίσεων) εξαρτάται ΜΟΝΟ από τα άκρα της διαδρομής ολοκλήρωσης και όχι από τη διαδρομή]

Απ (ii) $\left| \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \right| = \left| \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt \right| \leq \int_a^b |\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)| dt$
 $\leq \int_a^b \|\vec{F}(\vec{\gamma}(t))\| \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = \int_{\vec{\gamma}} \|\vec{F}\| ds$
 (C.S.)

(iii) Αν $\vec{F} = \nabla f$, τότε

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \nabla f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = \left[f(\vec{\gamma}(t)) \right]_{t=a}^{t=b} \quad \begin{array}{l} \text{επειδή η συνάρτηση } t \mapsto f(\vec{\gamma}(t)) \\ \text{είναι μία παράγωγος της συνάρτησης} \\ t \mapsto \nabla f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t). \end{array}$$

$$= f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a))$$

Παράδειγμα: Έστω $\vec{F}(x,y) = (y, x)$ και $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^4/4 \\ \sin^3(t\pi/2) \end{pmatrix}, t \in [0,1]$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ γίνεται ευκολότερος αν παρατηρήσουμε

ότι $\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ με $f(x,y) = xy$. Πράγματι έχουμε $\vec{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\gamma}(1) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$

και $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(\vec{\gamma}(1)) - f(\vec{\gamma}(0)) = \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{4}$

④ Τύποι του Green στο $\mathbb{R}^2$

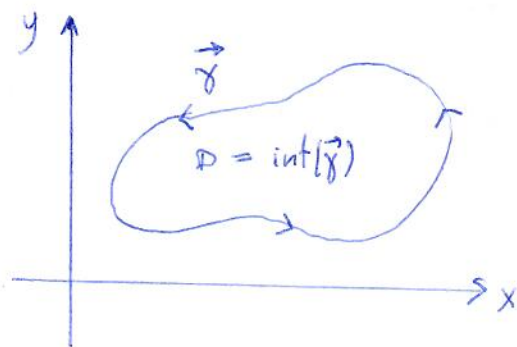
Οι τύποι του Green συνδέουν ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2ου είδους κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης του $\mathbb{R}^2$ με ένα διπλό ολοκλήρωμα επί του χωρίου που περικλείει η καμπύλη. Γενικεύουν για συναρτήσεις δύο μεταβλητών το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού: $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$.

Θέωρημα (Τύπος του Green): Έστω $P, Q = U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσεως C^1 ^{αμοιχτό}

και έστω $\vec{\gamma}$ ΑΠΛΗ κλειστή καμπύλη, τμηματικά C^1 , τ.ω. $\text{ext}(\vec{\gamma}) \cup \text{int}(\vec{\gamma}) \subset U$.

Υποθέτουμε επίσης ότι η $\vec{\gamma}$ έχει τον αντιωροδίοχο προσανατολισμό. Τότε

$$\text{Ισχύει } \int_{\vec{\gamma}} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\gamma}} P dx + Q dy = \iint_{\text{int}(\vec{\gamma})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx dy$$



Απ (Όταν το χωρίο $D = \text{int}(\vec{\gamma})$ είναι x -απλό και y -απλό)

Θα δείξουμε ότι όταν το D είναι y -απλό ισχύει

$$\int_{\vec{\gamma}} P dx = \int_{\vec{\gamma}} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = - \iint_{\text{int}(\vec{\gamma})} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) dx dy$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \text{ όπου } \varphi_1, \varphi_2 \in C^1([a,b]).$$

$$\text{Έχουμε } \iint_{\text{int}(\vec{\gamma})} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) dy \right) dx = \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx$$

$$\text{Επίσης έχουμε } \int_{\vec{\gamma}} P dx = \int_{\vec{\gamma}_1} P dx + \int_{\vec{\gamma}_2} P dx + \int_{\vec{\gamma}_3} P dx + \int_{\vec{\gamma}_4} P dx.$$

α) Μία παραμέτρηση της $\vec{\gamma}_1$ είναι η $\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix}$, $t \in [a, b]$, με $\vec{\gamma}_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}$

$$\text{Άρα } \int_{\vec{\gamma}_1} P dx = \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt$$

β) Μία παραμέτρηση της $\vec{\gamma}_2$ είναι η $\vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]$ και ισχύει

$$\vec{\gamma}_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Άρα } \int_{\vec{\gamma}_2} P dx = 0.$$

γ) Παρόμοια βρίσκουμε ότι $\int_{\vec{\gamma}_4} P dx = 0$ διότι $\vec{\gamma}_4'(t) \perp \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$.

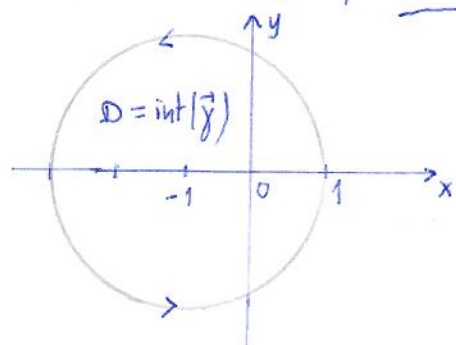
δ) Τέλος παρατηρούμε ότι η $\vec{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in [a, b]$, αντιστρέφει τον προανατολισμό της $\vec{\gamma}_3$. Άρα $\int_{\vec{\gamma}_3} P dx = - \int_{\vec{\gamma}_3^-} P dx = - \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι $\int_{\vec{\gamma}} P dx = - \iint_{\text{int}(\vec{\gamma})} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\int_{\vec{\gamma}} Q dy = \iint_{\text{int}(\vec{\gamma})} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy$.

Παράδειγμα: Έστω $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^4 + y^2 + e^x \\ 3x - y^3 - e^{y^2} \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -1 + 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$,

$t \in [0, 2\pi]$, μια απλή παραμέτρηση του κύκλου ακτίνας 2 με κέντρο το $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Η $\vec{\gamma}$ έχει τον αντιπροσώγειο προανατολισμό. Άρα για να υπολογίσουμε το $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ (που θα ήταν δύσκολο με χρήση του ορισμού) μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του Green. Έχουμε $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 - 2y$ και

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D (3 - 2y) dx dy \quad \text{όπου } D = \text{int}(\vec{\gamma}) = \{(x, y) : (x+1)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

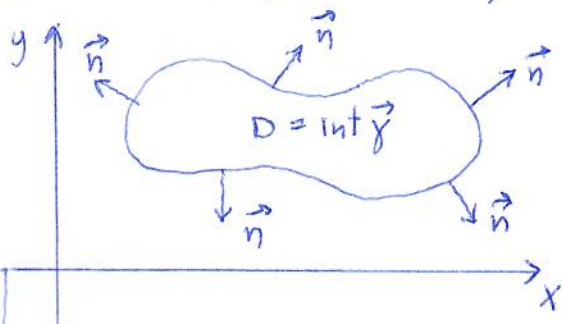
Παρατηρούμε επίσης ότι $\iint_D y dx dy = 0$ λόγω συμμετρίας [το D είναι συμμετρικό χωρίο ως προς τον άξονα των x και η συνάρτηση $(x, y) \mapsto y$ είναι περιττή ως προς τον άξονα των x].

$$\text{Συνεπώς } \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 3 \iint_D dx dy = 3 \cdot \text{εμβαδόν}(D) = 12\pi$$

Πόρισμα (Θεώρημα της απόκλισης) Έστω $\vec{F} = U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ένα διανυσματικό πεδίο κλάσης C^1 και έστω $\vec{\gamma}$ μία ανοιχτή καμπύλη, τμηματικά C^1 τ.ω. $\text{ίχνο}(\vec{\gamma}) \cup \text{int}(\vec{\gamma}) \subset U$. Έστω επίσης $\vec{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του $D = \text{int}(\vec{\gamma})$ με κατεύθυνση προς τα έξω. Τότε ισχύει

$$\int_{\vec{\gamma}} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \iint_D (\text{div } \vec{F})(x, y) dx dy$$

$$[(\text{div } \vec{F})(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y), \text{ αν } \vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}]$$



Απ: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in [a, b]$, έχει τον αντίστοιχο παραμετρικό. Τότε έχουμε

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} \text{ και θέτοντας } \vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} :$$

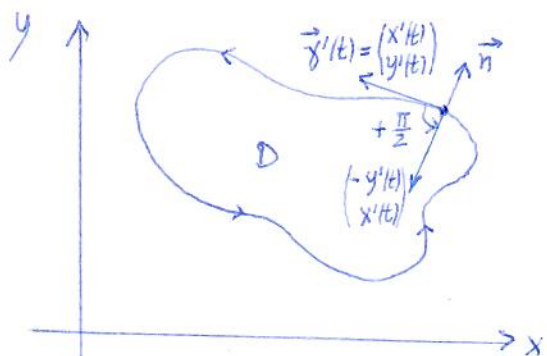
$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{P(x(t), y(t)) y'(t) - Q(x(t), y(t)) x'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}$$

Συνεπώς

$$\int_{\vec{\gamma}} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \int_a^b (P(x(t), y(t)) y'(t) - Q(x(t), y(t)) x'(t)) dt = \int_{\vec{\gamma}} \begin{pmatrix} -Q \\ P \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$$

$$\uparrow \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

Θεώρημα του Green



Παρατήρηση: Στην § 2 ορίσαμε το $\int_{\vec{\gamma}} f ds$ για συναρτήσεις f που είναι συνεχείς σε ένα ανοιχτό σύνολο U . Για να οριστεί το $\int_{\vec{\gamma}} f ds$ ΑΡΚΕΙ όμως η f να είναι συνεχής στο $\text{ίχνο}(\vec{\gamma})$, όπως και στο Πόρισμα που έχουμε $f = \vec{F} \cdot \vec{n} : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$

(5) Συντηρητικά Διανυσματικά πεδία στο $\mathbb{R}^n$ ($n=2,3$)

Ορ: $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ανοιχτό $(n=2,3)$ συντηρητικό $\Leftrightarrow \exists f \in C^1(U)$ τ.ω. $\vec{F} = \nabla f$.

Π.χ., είδαμε στο Κεφ 3 §8 ότι το βαρυτικό πεδίο $\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{GMm}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x}$ είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Θα αποδείξουμε αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να είναι ένα διανυσματικό πεδίο συντηρητικό.

Πρόταση: Έστω $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ανοιχτό $(n=2,3)$ ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο.

Υποθέτουμε ότι το U είναι κατά τοξά συνεκτικό: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in U, \exists \vec{\gamma}: [\alpha, \beta] \rightarrow U$, C^1 ή τμηματικά C^1 τ.ω. $\vec{\gamma}(\alpha) = \vec{a}$, $\vec{\gamma}(\beta) = \vec{b}$.

Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) Για κάθε C^1 ή τμηματικά C^1 καμπύλη $\vec{\gamma}: [\alpha, \beta] \rightarrow U$, το ολοκλήρωμα $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα $\vec{\gamma}(\alpha)$, $\vec{\gamma}(\beta)$.

(ii) Για κάθε C^1 ή τμηματικά C^1 κλειστή καμπύλη $\vec{\gamma}$ του U ισχύει $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

(iii) Το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

Απ: (iii) $\Rightarrow$ (ii) Είδαμε στην §3 ότι αν $\vec{F} = \nabla f$ τότε ισχύει

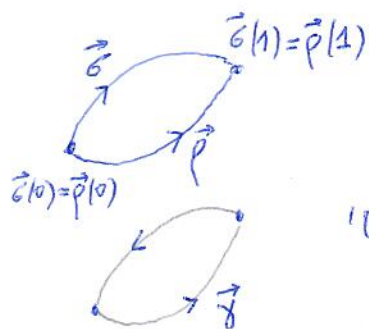
$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(\vec{\gamma}(\beta)) - f(\vec{\gamma}(\alpha)) = 0 \text{ για κάθε κλειστή καμπύλη } \vec{\gamma}: [\alpha, \beta] \rightarrow U.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $\vec{p}: [a, b] \rightarrow U$ και $\vec{q}: [c, d] \rightarrow U$ δύο τμηματικά

C^1 καμπύλες τ.ω. $\vec{p}(a) = \vec{q}(c)$, $\vec{p}(b) = \vec{q}(d)$. Χωρίς βλάβη της

γενικότητας υποθέτουμε ότι $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$. Ορίσουμε την

κλειστή και τμηματικά C^1 καμπύλη $\vec{\gamma}: [0, 2] \rightarrow U$, $\vec{\gamma}(t) = \begin{cases} \vec{p}(t) & \text{αν } t \in [0, 1] \\ \vec{q}(2-t) & \text{αν } t \in [1, 2] \end{cases}$



Άρα από την υπόθεση έχουμε $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

$$\text{Όμως } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_p \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_c \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \int_p \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

επειδή η $\vec{c}$ αντιγράφει τον προσανατολισμό της $\vec{c}$.

(i) $\Rightarrow$ (iii) θεωρούμε $n=2$. Η Απ. είναι παρόμοια όταν $n=3$. Έστω $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.

Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο $(x_0, y_0) \in U$ και ορίσουμε μία συνάρτηση $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

από τη σχέση $f(x, y) = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ όπου $\vec{\gamma}$ είναι μία καμπύλη με αρχή το (x_0, y_0)

και τέλος το (x, y) . Λόγω της υπόθεσης (i), η f είναι καλά ορισμένη.

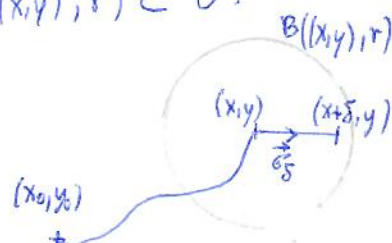
Θα δείξουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x} = P$. Παρόμοια θα έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$.

Επομένως η f θα είναι $C^1(U)$ με $\nabla f = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \vec{F}$.

Έστω $(x, y) \in U$ και $r > 0$ αρκετά μικρό ώστε $B((x, y), r) \subset U$.

$$\text{Για } |\delta| < r \text{ ισχύει } f(x+\delta, y) - f(x, y) = \int_{\vec{c}_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

όπου $\vec{c}_\delta$ το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(x, y), (x+\delta, y)$:



$\vec{c}_\delta(t) = (x+t\delta, y)$, $t \in [0, 1]$. Έχουμε

$$\int_{\vec{c}_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} P(x+t\delta, y) \\ Q(x+t\delta, y) \end{pmatrix} \cdot \vec{c}_\delta'(t) dt = \delta \int_0^1 P(x+t\delta, y) dt. \text{ Άρα}$$

$$\frac{f(x+\delta, y) - f(x, y)}{\delta} = \int_0^1 P(x+t\delta, y) dt \text{ και}$$

$$\frac{f(x+\delta, y) - f(x, y)}{\delta} - P(x, y) = \int_0^1 (P(x+t\delta, y) - P(x, y)) dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

Επομένως $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$.

Παρατήρηση: Οι ισχύοντες της πρότασης ισχύουν επίσης αν στο (i) και στο (ii) θεωρήσουμε ΑΠΛΕΣ καμπύλες.

Ορ: Ένα ανοιχτό, κατά τόξα συνεκτικό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται αληθώς συνεκτικό αν για κάθε αληθώς κλειστή καμπύλη $\gamma: [a,b] \rightarrow U$ ισχύει $\text{int}(\gamma) \subset U$ [δηλαδή αν το U δεν έχει "τρύπες"].

Παραδείγματα: Το $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ δεν είναι αληθώς συνεκτικό ενώ το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0): x \leq 0\}$ είναι αληθώς συνεκτικό.



αληθώς συνεκτικό



όχι αληθώς συνεκτικό



όχι αληθώς συνεκτικό



αληθώς συνεκτικό

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ένα αληθώς κριτήριο στη διάσταση $n=2$ για να επαληθεύσουμε αν ένα διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό:

Θεώρημα: Έστω $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ κλάσεως C^1 . Τότε ανοιχτό

(i) Αν το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό, ισχύει $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ στο U

(ii) Με την προϋπόθεση ότι το U είναι αληθώς συνεκτικό, το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό

ANN ισχύει $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ στο U .

Απ: (i) Εξ' υποθέσεως έχουμε $\vec{F} = \nabla f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix}$ με $f \in C^2(U)$

Επομένως ισχύει $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ και $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ στο U .

(ii) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το U είναι αληθώς συνεκτικό και ισχύει

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ στο U . Έστω γ μία αληθώς κλειστή καμπύλη του U .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η γ έχει τον αντιπροσώγειο προανατολισμό. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green στο χωρίο $\text{int}(\gamma) \subset U$ έχουμε $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{int}(\gamma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$. Έπεται λοιπόν από την προηγούμενη Πρόταση και την παρατήρηση που την ακολουθεί, ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

Παρατήρηση: Αν ξέρουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ είναι συντηρητικό, τότε μία συνάρτηση f τ.ω. $\nabla f = \vec{F} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = P, \frac{\partial f}{\partial y} = Q$ βρίσκεται με απλή ολοκλήρωση και είναι μοναδική μέχρι προσθετικής σταθεράς (βλ. Ασκ 6, κεφ 3).

Παραδείγματα 1) Το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ είναι

C^∞ στο $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ και ικανοποιεί τη σχέση $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ στο U .

Πράγματι $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Όμως δεν είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ διότι στο Παράδειγμα 3) της

παραγράφου § 3 βρήκαμε ότι $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2\pi \neq 0$ για την απλή κλειστή καμπύλη $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Αυτό συμβαίνει επειδή το χωρίο $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ΔΕΝ είναι απλά συνεκτικό.

Έπεται από το θεώρημα ότι ο περιορισμός του $\vec{F}$ σε ένα μικρότερο χωρίο

$V \subset U$, απλά συνεκτικό (όπως το $V_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$ ή το $V_2 = \{(x,y) : x > 0\}$)

είναι ένα συντηρητικό διανυσματικό πεδίο.

π.χ. ολοκληρώνοντας ως προς y την εξίσωση $\frac{\partial f}{\partial y} = Q = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}$

θα βρούμε μία συνάρτηση $f \in C^\infty(V_2)$ τ.ω. $\nabla f = \vec{F}$. Έχουμε λοιπόν

$f(x,y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi(x)$ και πρέπει επίσης να ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, άρα

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \right) + \varphi'(x) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} + \varphi'(x) = -\frac{y}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \text{σταθ.}$$

Έτσι έχουμε $\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ στο V_2 με $f(x,y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + \text{σταθ.}$

2) Το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + e^{-2y} \sin x \\ 2e^{-2y} \cos x + 2e^{2y} \end{pmatrix}$ είναι συντηρητικό

στο $\mathbb{R}^2$, διότι ισχύει $\frac{\partial P}{\partial y} = -2 \sin x e^{-2y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ και το $\mathbb{R}^2$ είναι απλά

συνεκτικό. Για να προσδιορίσουμε μία συνάρτηση $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ τ.ω. $\nabla f = \vec{F}$

ολοκληρώνουμε ως προς x την εξίσωση $\frac{\partial f}{\partial x} = P = x + e^{-2y} \sin x$.

Βρίσκουμε $f(x,y) = \frac{x^2}{2} - e^{-2y} \cos x + \varphi(y)$ και πρέπει επίσης να ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q \Leftrightarrow 2e^{-2y} \cos x + \varphi'(y) = 2e^{-2y} \cos x + 2e^{2y}$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(y) = 2e^{2y} \Leftrightarrow \varphi(y) = e^{2y} + \text{σταθ.}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ στο $\mathbb{R}^2$ με $f(x,y) = \frac{x^2}{2} - e^{-2y} \cos x + e^{2y} + \text{σταθ.}$

Στη διάσταση $n=3$, έχουμε ένα παρόμοιο κριτήριο:

Θέωρημα: Έστω $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ κλάσεως C^1 όπου ανοιχτό

$U = \mathbb{R}^3$ ή $U = \mathbb{R}^3 \setminus A$ με A πεπερασμένο σύνολο. Τότε το $\vec{F}$ είναι

συντηρητικό ΑΝΝ ισχύει $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ στο U (δηλαδή

ΑΝΝ κατ' $\vec{F} = \vec{0}$ στο $U \Leftrightarrow$ το $\vec{F}$ είναι αετρόβητο)

Απ: $\Rightarrow$ όπως στη διάσταση $n=2$, $\Leftarrow$ παραλείπεται

⑥ Παραμετρικές επιφάνειες στο $\mathbb{R}^3$

Στο κεφ 3 § 10, αποδείξαμε ότι υπό κάποιες προϋποθέσεις τα σύνολα σταθμής $f(x,y,z) = c$ είναι επιφάνειες. Για να ορίσουμε τα επιφανειακά ολοκληρώματα, είναι αναγκαίο να δούμε τις επιφάνειες από μία διαφορετική οπτική.

Ορ: Μία παραμετρική επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$ είναι μία συνεχής συνάρτηση

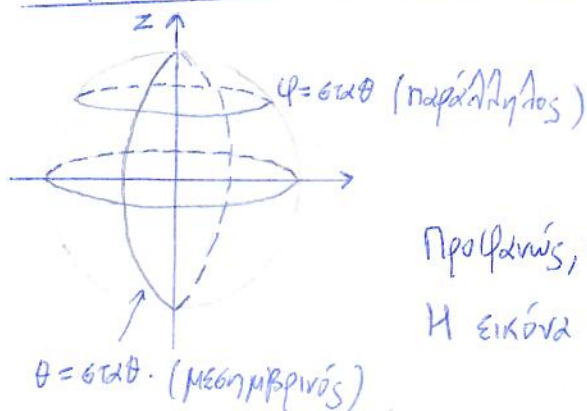
$$\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \mapsto \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Η εικόνα της παραμετρικής επιφάνειας είναι το σύνολο $\Phi(D) \subset \mathbb{R}^3$

→ Σε ό,τι ακολουθεί θεωρούμε επιφάνειες ορισμένες σε ένα x -αηλό ή y -αηλό χώρο $D \subset \mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε επίσης ότι η Φ είναι 1-1 στο $\overset{\circ}{D}$ (το εσωτερικό του D) και $\Phi \in C^1(\overset{\circ}{D}; \mathbb{R}^3)$.

Παραδείγματα 1) Έστω $\Phi_1: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$



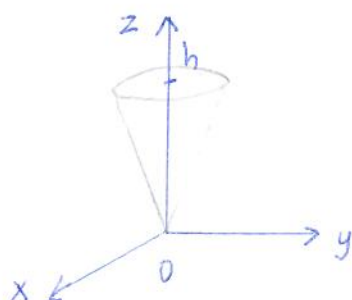
$$(\theta, \varphi) \mapsto \begin{cases} x = \sin \varphi \cos \theta \\ y = \sin \varphi \sin \theta \\ z = \cos \varphi \end{cases}$$

εφαίρειες συνεταγμένες

Προφανώς, η Φ_1 είναι 1-1 και C^∞ στο $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$.

Η εικόνα της Φ_1 είναι η μοναδιαία σφαίρα.

2) Έστω $\Phi_2: [0, h] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$



$$(u, v) \mapsto \begin{cases} x = \lambda u \cos v \\ y = \lambda u \sin v \\ z = u \end{cases}$$

όπου $h, \lambda > 0$ σταθ.

Προφανώς, η Φ_2 είναι 1-1 και C^∞ στο $(0, h) \times (0, 2\pi)$.

Η εικόνα της Φ_2 είναι ο κώνος:

$$\{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} = \lambda z, z \in [0, h]\}$$

Εφαπτόμενο επίπεδο: Έστω $(u_0, v_0) \in \mathring{D}$, $(x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$ και $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

μία C^1 καμπύλη του D τ.ω. $\vec{\gamma}(t_0) = (u_0, v_0)$. Τότε, η $\vec{\Gamma}(t) = \Phi(\vec{\gamma}(t)) = \Phi(u(t), v(t))$

$[\vec{\Gamma}: [a, b] \xrightarrow{\vec{\gamma}} D \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^3]$ είναι μία C^1 καμπύλη της επιφάνειας $S = \Phi(D)$

και το διάνυσμα

$$\vec{\Gamma}'(t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \Phi(\vec{\gamma}(t)) = D\Phi(\vec{\gamma}(t_0)) \vec{\gamma}'(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \text{ετήλεις} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(t_0) \\ v'(t_0) \end{bmatrix}$$

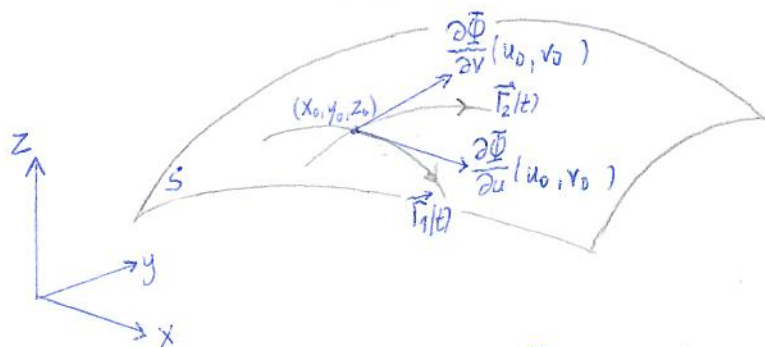
πίνακας 3×2 πίνακας 2×1

$$= u'(t_0) \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) + v'(t_0) \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) \in \text{Span} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^3$

είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της επιφάνειας S στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

Ειδικότερα, αν $\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} u_0 + t \\ v_0 \end{pmatrix}$ βρίσκουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)$
 $\vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 + t \end{pmatrix}$ " " " " $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$



Φ: Μία παραμετρική επιφάνεια $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται κανονική όταν

(i) είναι 1-1 και κλάσης C^1 στο $\mathring{D}$ και

(ii) για κάθε $(u_0, v_0) \in \mathring{D}$, τα διανύσματα $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)$ και $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ είναι γραμμικά

ανεξάρτητα. Στην περίπτωση αυτή, η επιφάνεια έχει σε κάθε σημείο

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \Phi(u_0, v_0)$ με $(u_0, v_0) \in \mathring{D}$, ένα εφαπτόμενο επίπεδο που ορίζεται από

τα διανύσματα $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)$ και $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$. Άρα το $\vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο και θέτοντας $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, μία εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου είναι $n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$.

Παραδείγματα 1) Οι παραμετρικές επιφάνειες Φ_1 και Φ_2 του προηγούμενου παραδείγματος είναι κανονικές.

2) Η $\Phi_3(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, είναι μία κανονική παραμέτρηση του ελικοειδούς. Η Φ_3 είναι C^∞ και 1-1 στο $\mathbb{R}^3$. Πράγματι,

$$\Phi_3(u, v) = \Phi_3(\tilde{u}, \tilde{v}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \cos \tilde{v} \\ \tilde{u} \sin \tilde{v} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} u = \tilde{u} \\ v = \tilde{v} \end{matrix}. \text{ Επομένως, έχουμε}$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Θα βρούμε το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\Phi(1, \pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}$.

$$\text{Έχουμε } \frac{\partial \Phi}{\partial u}(1, \pi) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(1, \pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ άρα η εξίσωση του}$$

εφαπτομένου επιπέδου είναι $y + (z - \pi) = 0$.

⑦ Επιφανειακά ολοκληρώματα 1ου είδους

Ορ: Έστω $f = \underset{\text{ανοιχτό}}{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μία

κανονική παραμετρική επιφάνεια. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της f

ενί της $S = \Phi(D)$ είναι το

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \right\| du dv$$

Σχόλια 1) Το $dS = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \right\| du dv$ είναι το στοιχείο

εμβαδού της επιφάνειας S . Πράγματι, έστω $R_{ij} = [u_i, u_i + \Delta u_i] \times [v_j, v_j + \Delta v_j]$

ένα μικρό ορθογώνιο τ.ω $R_{ij} \subset D$. Τότε, η εικόνα του $S_{ij} = \Phi(R_{ij})$

μέσω του μετασχηματισμού Φ , προεχθίζεται από το παραλληλόγραμμο $\tilde{S}_{ij}$ με

προσείμενες πλευρές $[\Phi(u_i, v_j), \Phi(u_i, v_j) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_i, v_j) \Delta u_i]$ και

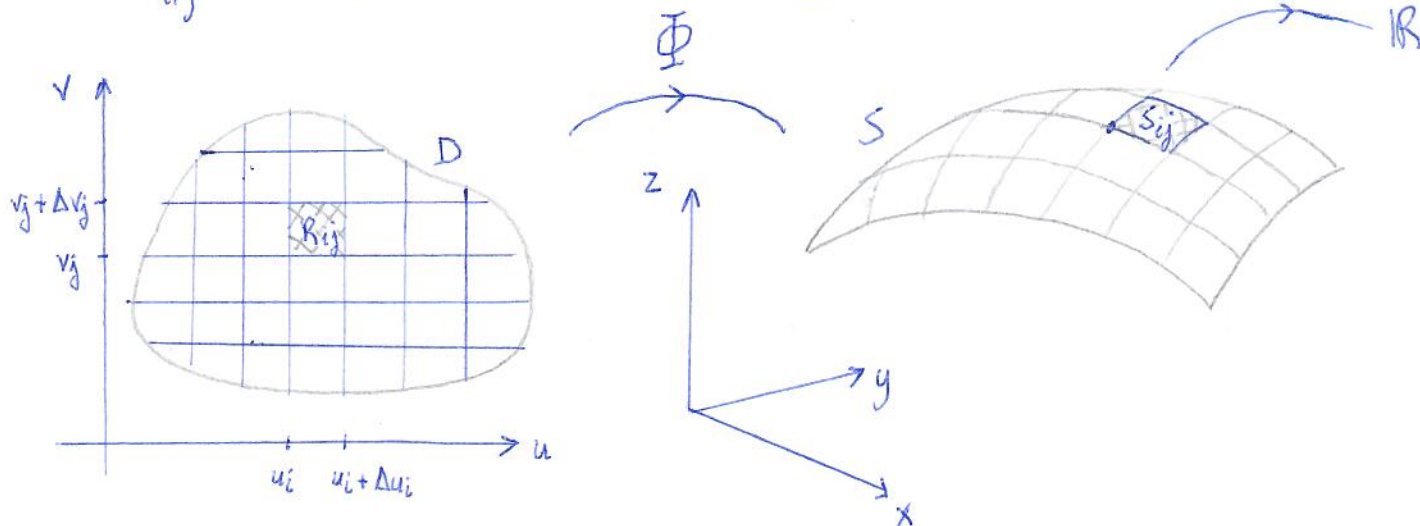
$[\Phi(u_i, v_j) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_i, v_j) \Delta v_j]$ (βλ. κεφ 5, §5). Επιπλέον,

Εμβαδόν ($\tilde{S}_{ij}$) = $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u_i \Delta v_j$. Έτσι βλέπουμε ότι

$$\iint_D f(\Phi(u,v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \right\| du dv \approx \sum_{i,j} f(\Phi(u_i, v_j)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u_i \Delta v_j$$

$$\approx \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \text{εμβαδόν}(\tilde{S}_{ij}) \quad \text{όπου} \quad \Phi(u_i, v_j) = \begin{pmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{pmatrix}$$

$$\approx \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \text{εμβαδόν}(S_{ij}) \approx \iint_S f dS$$



2) Ειδικότερα, αν $f \equiv 1$, τότε το $E(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \right\| du dv$ είναι το εμβαδόν της επιφάνειας S .

3) Αποδεικνύεται ότι το επιφανειακό οδοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από την παραμέτρηση

4) Για να ορίζεται το επιφανειακό οδοκλήρωμα, αρκεί η f να είναι συνεχής στο $S = \Phi(D)$.

Παραδείγματα 1) θεωρούμε πάλι την παραμέτρηση $\Phi_1(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x = \sin \varphi \cos \theta \\ y = \sin \varphi \sin \theta \\ z = \cos \varphi \end{pmatrix}$, $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, της μοναδιαίας σφαίρας S .

$$\text{Έχουμε } \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2 \varphi \cos \theta \\ -\sin^2 \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} = -\sin \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } \left\| \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right\| = \sin \varphi \text{ επειδή } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ και το στοιχείο}$$

$$\text{εμβαδού της σφαίρας είναι } \boxed{dS = \sin \varphi d\theta d\varphi}.$$

• Το εμβαδόν της ^{μοναδιαίας} σφαίρας είναι λοιπόν:

$$E(S) = \iint_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} \sin \varphi d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) d\theta = \int_0^{2\pi} 2 d\theta = 4\pi$$

$$= \left[-\cos \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 2$$

• Θα υπολογίσουμε επίσης το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \iint_S z^2 dS &= \iint_{[0,2\pi] \times [0,\pi]} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} d\theta = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

2) Θεωρούμε τώρα την παραμέτρηση $\Phi_2(u,v) = \begin{pmatrix} x = \lambda u \cos v \\ y = \lambda u \sin v \\ z = u \end{pmatrix}, (u,v) \in [0,h] \times [0,2\pi],$
του κώνου K . Έχουμε $(h, \lambda > 0)$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} \lambda \cos v \\ \lambda \sin v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -\lambda u \sin v \\ \lambda u \cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \lambda \cos v & \lambda \sin v & 1 \\ -\lambda u \sin v & \lambda u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda u \cos v \\ -\lambda u \sin v \\ \lambda^2 u \end{pmatrix}.$$

Άρα $\left\| \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u,v) \right\| = \lambda u \sqrt{1+\lambda^2}$ και το εμβαδόν του κώνου

$K = \Phi_2([0,h] \times [0,2\pi])$ είναι

$$\begin{aligned} E(K) &= \iint_{[0,h] \times [0,2\pi]} \lambda \sqrt{1+\lambda^2} u du dv = \lambda \sqrt{1+\lambda^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^h u du \right) dv = \\ &= \lambda \sqrt{1+\lambda^2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{u^2}{2} \right]_{u=0}^{u=h} dv = \lambda \sqrt{1+\lambda^2} \int_0^{2\pi} \frac{h^2}{2} dv = \lambda \sqrt{1+\lambda^2} h^2 \pi \end{aligned}$$

Ιδιότητες του επιφανειακού ολοκληρώματος

Έστω $f, g: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ ανοιχτό

μία κανονική παραμετρική επιφάνεια τ.ω. $S = \Phi(D) \subset U$. Τότε

$$(i) \iint_S (\lambda f + \mu g) dS = \lambda \iint_S f dS + \mu \iint_S g dS$$

(ii) $f \leq g$ στο $S \Rightarrow \iint_S f dS \leq \iint_S g dS$ και ειδικότερα ισχύει

$$\left| \iint_S f dS \right| \leq \iint_S |f| dS \leq \max_S |f| \underbrace{E(S)}_{\text{Εμβαδόν της } S}$$

⑧ Το Θεώρημα του Stokes

Θεώρημα: Έστω $S = \Phi(D)$ μία προσανατολισμένη επιφάνεια η οποία

ορίζεται από μία κανονική παραμετρηση $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Υποθέτουμε

ότι το ∂S είναι μία τμηματικά C^1 απλή κλειστή καμπύλη $\vec{\gamma}$, θετικής

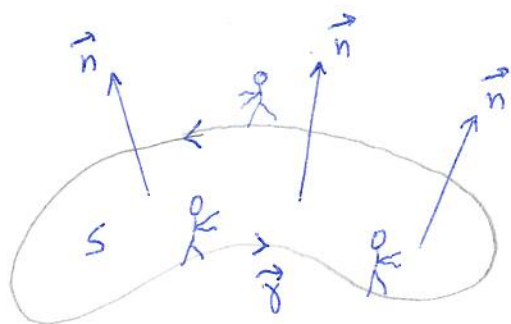
φοράς ως προς το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\vec{n} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|}$.

[Πρακτικός κανόνας: καθώς περπατάμε πάνω στο ∂S με το $\vec{n}$ να έχει

την κατάκόρυφη κατεύθυνση, η S πρέπει να βρίσκεται στα αριστερά μας]

Τότε για κάθε διανυσματικό πεδίο $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ κλάσης C^1 με $S \subset U$,
ανοιχτό

$$\text{ισχύει } \iint_S (\underbrace{\text{curl } \vec{F}}_{\text{εξ. χιρόμενο}} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



Ο θετικός προσανατολισμός της γ που ενάγεται από το $\vec{n}$.

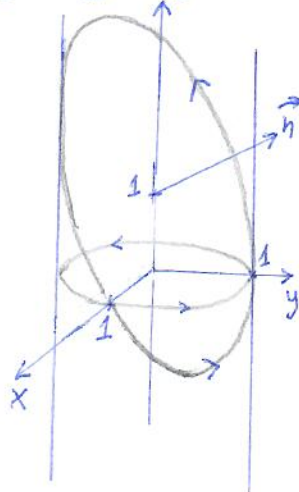
Παράδειγμα: Έστω S η τομή του επιπέδου $x+y+z=1$ με τον κύλινδρο $x^2+y^2 \leq 1$ και γ μία αηδή κλειστή καμπύλη που φράτσει την επιφάνεια S . Υποθέτουμε ότι η γ έχει θετική φορά ως προς το κάθετο διάνυσμα $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ στο επίπεδο $x+y+z=1$.

Για να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int_{\gamma} -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$ είναι ανδούστερο να

εφαρμόσουμε το θεώρημα του Stokes στο διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ -z^3 \end{pmatrix}$ και να υπολογίσουμε

το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S (\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n}) dS = I$

Έχουμε $\text{curl } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3(x^2+y^2) \end{pmatrix}$ και $\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} = \sqrt{3}(x^2+y^2)$



Επείτα, θεωρούμε την παραμέτρηση $\Phi: D = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$

της επιφάνειας S και υπολογίζουμε το

στοιχείο εμβαδού της S . Έχουμε $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ και

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Άρα $dS = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| dx dy = \sqrt{3} dx dy$

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

πολικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_D 3(x^2 + y^2) dx dy \stackrel{!}{=} \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} 3r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 3r^3 dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} d\theta = \frac{3\pi}{2} \\ &\quad = \left[\frac{3}{4} r^4 \right]_{r=0}^{r=1} \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, για να υπολογίσουμε απευθείας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα I ,

βρίσκουμε μία παραμέτρηση του ∂S : $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 - \cos t - \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, θετικής

φοράς ως προς $\vec{n}$ και έπειτα από αρκετές πράξεις καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Παρατήρηση: Το Θεώρημα του Green είναι μία ειδική περίπτωση του

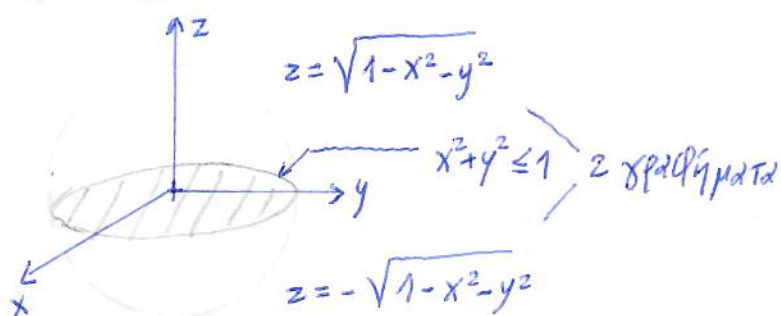
Θεωρήματος του Stokes, όταν η επιφάνεια S είναι ένα χωρίο του επιπέδου

που φράσσεται από μία απλή κλειστή καμπύλη και $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}$. Στην

περίπτωση αυτή έχουμε $\text{curl } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$.

9) Το Θεώρημα της απόκλισης στο $\mathbb{R}^3$

Ένα τριχώνωδες χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, όπως αυτά που θεωρήσαμε στο κεφ 5, §4 π.χ. το $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y)\}$ έχει ένα σύνορο $S = \partial\Omega$ που αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος (τουλάχιστον 2, το πολύ 6) γραφημάτων συναρτήσεων από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}$.



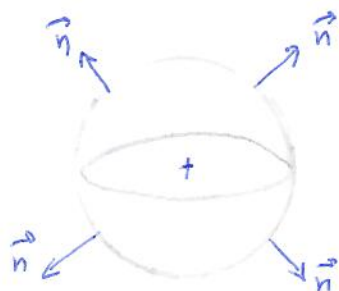
$S = \text{μολαδιαία σφαίρα}$



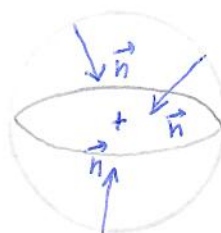
$$\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$$

6 έδρες $\rightarrow$ 6 γραφήματα

Μία τέτοια επιφάνεια λέγεται κλειστή και τα γραφήματα που τη συνθέτουν λέγονται έδρες. Οι κλειστές επιφάνειες μπορούν να προσανατολιστούν με δύο τρόπους:



1) μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα έξω



2) μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα μέσα

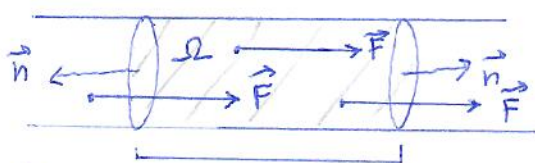
Θεώρημα: Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα στοιχειώδες χωρίο και $\vec{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega = S$. Τότε, για κάθε διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ κλάσεως C^1 , με $\Omega \subset U$,
 ανοιχτό

$$\text{Ισχύει} \quad \iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{F}) \, dx \, dy \, dz = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, dS$$

↑
εξωτερικό γινόμενο

$$\left[\text{Αν } \vec{F} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}, \text{ έχουμε } \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right]$$

Ερμηνεία στη Φυσική

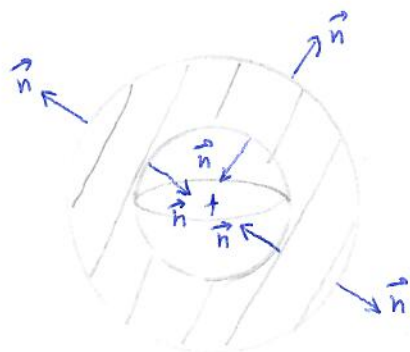


σωλήνας

Αν το $\vec{F}(x,y,z)$ είναι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, τότε το $\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, dS$ παριστά την εξωτερική ροή του $\vec{F}$ δια μέσου

της επιφάνειας S , δηλαδή την ποσότητα του ρευστού που εξέρχεται του Ω ανά μονάδα χρόνου. Ειδικότερα, αν $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, το $\vec{F}$ λέγεται αδυσπνέστο, διότι η ποσότητα του ρευστού που περιέχεται στο Ω παραμένει σταθερή.

Παρατήρηση: Το Θεώρημα της απόκλισης ισχύει για όλα τα χωρία $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ τ.ω το $S = \partial\Omega$ να είναι μία κλειστή επιφάνεια, τμηματικά C^1 .



Π.χ. ισχύει για το χωρίο

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : R_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R_2^2 \}$$

$$\text{με } 0 < R_1 < R_2$$

Παράδειγμα: Έστω $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$ και $\Omega = \overline{B}(\vec{0}, R)$.

Έστω επίσης $S = \partial\Omega$ η σφαίρα ακτίνας R με κέντρο το $\vec{0}$ και $\vec{n} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη S .

Για να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $I = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$

είναι απλούστερο να εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης στο $\vec{F}$ και να υπολογίσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = I$.

Έχουμε $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$. Άρα, χρησιμοποιώντας τις σφαιρικές συντεταγμένες, βρίσκουμε

$$I = \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_{[0,R] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]} 3r^2 (r^2 \sin\varphi) dr d\theta d\varphi$$

$$= 3 \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^4 \sin\varphi dr \right) d\theta \right) d\varphi = 3 \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{R^5 \sin\varphi}{5} d\theta \right) d\varphi$$
$$= \left[\frac{r^5 \sin\varphi}{5} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{R^5 \sin\varphi}{5} \quad = \frac{2\pi R^5 \sin\varphi}{5}$$

$$= \frac{6\pi}{5} R^5 \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = \frac{12\pi}{5} R^5$$
$$= \left[-\cos\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 2$$