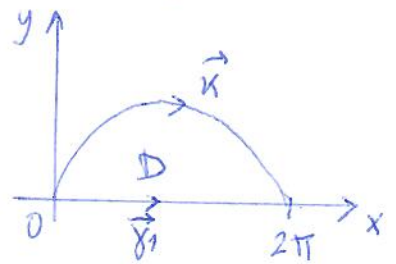


ΑΣΚ 1: Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ το χωρίο που φράσσεται από πάνω από την καμπύλη $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$ και από κάτω από τον άξονα των x .

Να δείχθει ότι για $\alpha, \beta \geq 0$, ισχύει

$$\iint_D x^\alpha y^\beta dx dy = \frac{1}{\beta+1} \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^\alpha (1 - \cos t)^{\beta+2} dt$$



Λύση: Θέτουμε $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t = x'(t)$ και $P(x, y) = x^\alpha y^{\beta+1}$,

$$\begin{aligned} \text{έχουμε } \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^\alpha (1 - \cos t)^{\beta+2} dt &= \int_0^{2\pi} (x(t))^\alpha (y(t))^{\beta+1} x'(t) dt \\ &= \int_{\vec{r}} P dx \end{aligned}$$

Από τον τύπο του Green προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} (x, y) dx dy &= \int_{\vec{\gamma}} P dx \quad \text{όπου } \vec{\gamma} \text{ είναι μία άλλη κλειστή καμπύλη} \\ &\quad \text{που περικλείει το } D \text{ και έχει τον} \\ &\quad \text{αντιωρολόγιο προσανατολισμό.} \\ &\quad \parallel \\ -(\beta+1) \iint_D x^\alpha y^\beta dx dy \end{aligned}$$

Επιπλέον, θέτουμε $\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, έχουμε

$$\int_{\vec{\gamma}} P dx = \int_{\vec{\gamma}_1} P dx - \int_{\vec{r}} P dx \quad \text{και} \quad \int_{\vec{\gamma}_1} P dx = 0 \quad \text{δωτί} \quad P(x, 0) = 0$$

δωτί η $\vec{r}$ έχει τον ωρολόγιο
προσανατολισμό

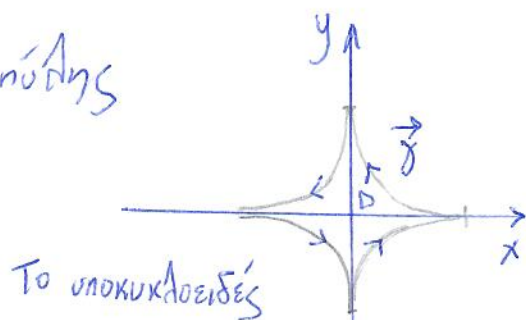
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\int_{\vec{r}} P dx = (\beta+1) \iint_D x^\alpha y^\beta dx dy$ που
είναι το ζητούμενο.

ΑΣΚ 2 Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης

$$\vec{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} a \cos^3 \theta \\ a \sin^3 \theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi], a > 0,$$

και το εμβαδόν του χωρίου $D = \text{int}(\vec{\gamma})$

Λύση: Έχουμε $\vec{\gamma}'(\theta) = \begin{pmatrix} -3a \cos^2 \theta \sin \theta \\ 3a \sin^2 \theta \cos \theta \end{pmatrix}$



$$\begin{aligned} \text{και } \|\vec{\gamma}'(\theta)\| &= 3a \sqrt{\omega^4 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \omega^2 \theta} = 3a |\omega \theta \sin \theta| \\ &= \omega^2 \theta \sin^2 \theta (\omega^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Άρα $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{μήκος της } \vec{\gamma}}}{L(\vec{\gamma})} = \int_0^{2\pi} 3a |\omega \theta \sin \theta| d\theta = 12a \int_0^{\pi/2} \omega \theta \sin \theta d\theta = 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta$

$$= 6a \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6a$$

Εφαρμόσουμε τον τύπο του Green στην αλλη κλειστή καμπύλη $\vec{\gamma}$ (που έχει τον αντιπροσώγειο προσανατολισμό), επιλέγοντας το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \text{ Έχουμε λοιπόν}$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\vec{\gamma}} -y dx + x dy = \int_0^{2\pi} 3a^2 (\sin^4 \theta \omega^2 \theta + \omega^4 \theta \sin^2 \theta) d\theta$$

$$\stackrel{\text{II}}{=} 3a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \omega^2 \theta d\theta = \frac{3a^2}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta$$

$$\stackrel{\text{εμβαδόν}}{=} \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{3}{4} a^2 \pi$$

$$\uparrow \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

Άρα $E(D) = \frac{3}{8} a^2 \pi$

ΑΣΚ 3: Θεωρούμε στο $\mathbb{R}^3$ τον κύκλο K με εξίσωση $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \sin t \\ 3 \end{pmatrix}$,

$t \in [0, 2\pi]$. Εν συνεχεία θεωρούμε την επιφάνεια S που σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν την αρχή των αξόνων O με τα σημεία M του κύκλου K , δηλαδή $S = \bigcup_{M \in K} [O, M]$. Ναδειχθεί ότι $\text{Εμβαδόν}(S) = \int_0^\pi \sqrt{A + B \cos^4 u} du$ όπου $A, B > 0$ είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν.

Λύση: Η $\Phi(\lambda, t) = \lambda \vec{\gamma}(t)$ με $(\lambda, t) \in D = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ είναι

μια παραμέτρηση της S διότι $\Phi(D) = S$. Εμφάνει είναι φανερό ότι η Φ είναι 1-1 και C^1 στο $\overset{\circ}{D} = (0, 1) \times (0, 2\pi)$. Υπολογίζουμε

- $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, t) = \vec{\gamma}(t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\lambda, t) = \lambda \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, t) \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\lambda, t) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 + \cos t & \sin t & 3 \\ -\lambda \sin t & \lambda \cos t & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda \cos t \\ -3\lambda \sin t \\ \lambda(\cos t + 1) \end{pmatrix}$
- $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, t) \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\lambda, t) \right\| = \lambda \sqrt{9 + (\cos t + 1)^2} = \lambda \sqrt{9 + 4 \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)}$
 $\uparrow$
 $\cos t + 1 = 2 \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)$

Βλέπουμε επίσης ότι η παραμέτρηση Φ είναι κανονική διότι για $\lambda > 0$ ισχύει

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, t) \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\lambda, t) \right\| \neq 0. \text{ Άρα}$$

$$\begin{aligned} \text{Εμβαδόν}(S) &= \iint_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, t) \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\lambda, t) \right\| d\lambda dt = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \lambda \sqrt{9 + 4 \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)} d\lambda \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{9 + 4 \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)} dt = \int_0^\pi \sqrt{9 + 4 \cos^4 u} du \\ &\quad \uparrow \\ &\quad u = t/2 \end{aligned}$$

ΑΣΚ 4 Έστω $f = D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 στο $\bar{D}$ και

$$S = \{ (x, y, z) : (x, y) \in D, z = f(x, y) \} \text{ το γράφημα της } f.$$

Να βρεθεί το στοιχείο εμβαδού dS της επιφάνειας S .

Λύση: Θεωρούμε την παραμετρηση του S : $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$

$$\text{Έχουμε } \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Άρα } dS = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right\| dx dy = \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} dx dy$$

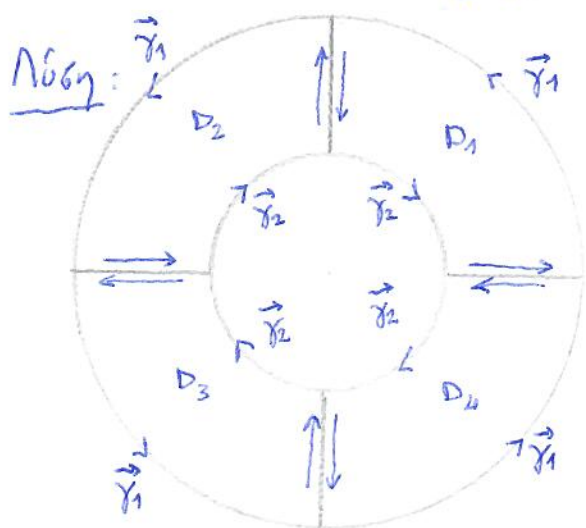
ΑΣΚ 5 : Έστω ο δακτύλιος $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : R_1 < \sqrt{x^2+y^2} < R_2\}$

με $0 < R_1 < R_2$. Το σύνορο του D αποτελείται από

- την εξωτερική καμπύλη $\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} R_2 \cos t \\ R_2 \sin t \end{pmatrix}$ με τον αντίστροφο προσανατολισμό $\uparrow$
 $[0, 2\pi]$
- την εσωτερική " $\vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} R_1 \cos t \\ -R_1 \sin t \end{pmatrix}$ " " " " " $\uparrow$
 $[0, 2\pi]$

Να δείχθεί ότι για κάθε διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ κλάσης C^1
 ανοιχτό

με $D \subset U$ ισχύει
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^2 \int_{\vec{\gamma}_i} P dx + Q dy$$



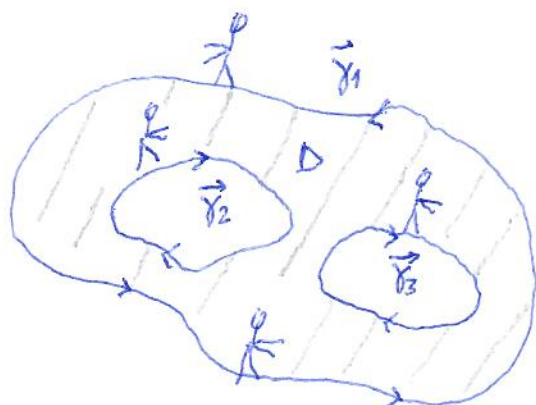
1) Το D διασπάται σε 4 αλλά χωρία

D_1, D_2, D_3, D_4 όπως στο σχήμα

2) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Green σε
 καθένα από τα χωρία αυτά και αθροίζουμε
 τα αποτελέσματα

3) Έχουμε το ζητούμενο διότι τα ολοκλήρωμα
 κατά μήκος των εσωτερικών ευθύγραμμων τμημάτων
 με αντίθετες κατευθύνσεις αλληλοακυρώνονται

Γενίκευση : Το Θεώρημα Green ισχύει για χωρία D τ.ω. το ∂D είναι
 μία πεπερασμένη ένωση δηλών κλειστών καμπύλων με τον σωστό προσανατολισμό



Τότε ισχύει
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^K \int_{\vec{\gamma}_i} P dx + Q dy$$

[Σωστός προσανατολισμός:

Καθώς περπατάμε πάνω στο ∂D , το χωρίο D

πρέπει να βρίσκεται στα αριστερά μας. Άρα:

εξωτερική καμπύλη με τον αντίστροφο προσανατολισμό
 και εσωτερικές καμπύλες " " " " " " " "]

ΑΣΚ 6 (Εφαρμογή της ΑΣΚ 5): Έστω $\vec{\gamma}_1$ μια αηδή κλειστή καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ τ.ω. $\vec{0} \in \text{int}(\vec{\gamma}_1)$. Να υπολογιστεί το

$$\int_{\vec{\gamma}_1} \left(-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) \text{ υποθέτοντας ότι η } \vec{\gamma}_1 \text{ έχει τον αντιπρολόγιο προσανατολισμό.}$$

Λύση: Είδαμε στην § 3 και στην § 5 ότι το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \text{ ικανοποιεί } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$$

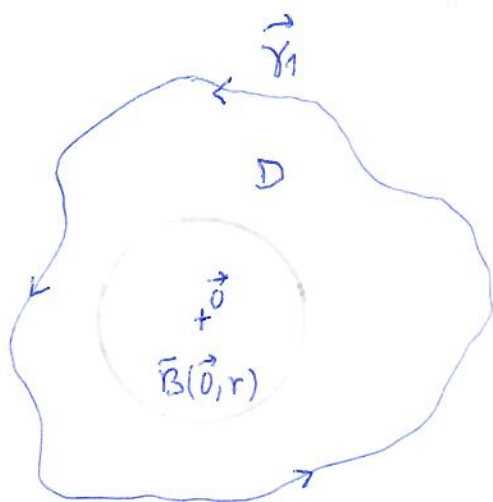
$$(x,y) \neq (0,0)$$

$$\text{και } \int_{\vec{\gamma}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2\pi \text{ για } \vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

$$\text{με } t \in [0, 2\pi], r > 0.$$

Επιλέγουμε ένα r αρκετά μικρό τ.ω. $\bar{B}(\vec{0}, r) \subset \text{int}(\vec{\gamma}_1)$ και εφαρμόζουμε

το γενικευμένο Θεώρημα Green της ΑΣΚ 5 στο χωρίο $D = \text{int}(\vec{\gamma}_1) \setminus \bar{B}(\vec{0}, r)$.



Βρίσκουμε

$$\underbrace{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy}_{= 0} = \int_{\vec{\gamma}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{\vec{\gamma}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

επειδή η $\vec{\gamma}_2$ έχει τον αντιπρολόγιο προσανατολισμό και είναι εσωτερική καμπύλη

$$\text{Άρα } \int_{\vec{\gamma}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\gamma}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2\pi$$