

Θέμα 1 : Έστω $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+2y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

α) Έχουμε $|f(x,y)| \leq \frac{|x|^4+2|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^2 + 2(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2}$
 $\uparrow$
 $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

Άρα $|f(x,y) - f(0,0)| \leq (x^2+y^2) + 2\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0$ όταν $(x,y) \rightarrow (0,0)$

και η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

β) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν στο $(0,0)$. Πράγματι $f(x,0) = x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} \Big|_{x=0} x^2 = 0$

και $f(0,y) = 2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy} \Big|_{y=0} 2y = 2$.

Εξ' ορισμού η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ ΑΝΝ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^4+2y^3) - 2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0 \quad . \quad \text{Θέτουμε } \varphi(x,y) = \frac{x^4 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \text{ και}$$

βλέπουμε ότι για $\lambda > 0$ έχουμε $\varphi(\lambda, \lambda) = \frac{(\lambda^4 - 2\lambda^3)}{2^{3/2}\lambda^3} \Rightarrow \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \varphi(\lambda, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f ΔΕΝ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Θέμα 2 α) Δείξτε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $\phi \in C^\infty((- \varepsilon, \varepsilon))$ με $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, τ.ω $\phi(0) = 0$ και $x(\phi(x))^4 + e^x + \sin|\phi(x)| = 1$, $\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Υπολογίστε επίσης την παράγωγο $\phi'(0)$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = xy^4 + e^x + \sin y$ που είναι C^∞ στο $\mathbb{R}^2$. Το σημείο $(0, 0)$ ανήκει στο σύνολο στάθμης της f για την τιμή $c = 1$, διότι $f(0, 0) = 1$. Επιπλέον, έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4xy^3 + \cos y \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0.$$

Άρα, η ύπαρξη μιας συνάρτησης $\phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ τ.ω $\phi(0) = 0$ και $f(x, \phi(x)) = 1$ (*), $\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ προκύπτει από το Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.

Παραγωγίζοντας ως προς x την εξίσωση $x(\phi(x))^4 + e^x + \sin|\phi(x)| = 0$ (*),

$$\text{βρίσκουμε } (\phi(x))^4 + 4x(\phi(x))^3\phi'(x) + e^x + \cos|\phi(x)|\phi'(x) = 0.$$

$$\text{'Αρα για } x=0 \text{ έχουμε } \underbrace{0}_{1} + \underbrace{0}_{1} + \underbrace{e^0}_{1} + \underbrace{\cos(0)}_{1}\phi'(0) = 0 \Rightarrow \phi'(0) = -1$$

β) Δείξτε ότι το σύστημα
$$\begin{cases} x^3 - y^2 = u \\ x \sin(x - y^2) = v \end{cases}$$
 μπορεί να λυθεί μονοσήμαντα ως προς (x, y)

για (u, v) κοντά στο $(0, 0)$, με τη λύση $(x(u, v), y(u, v))$ να βρίσκεται κοντά στο $(1, 1)$. Υπολογίστε επίσης το διαφορικό των συνάρτησεων $x(u, v)$ και $y(u, v)$ στο $(0, 0)$.

Λύση Έστω $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 - y^2 \\ x \sin(x - y^2) \end{pmatrix}$. Έχουμε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$,

$$f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Df(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 & -2y \\ \sin(x-y^2) + x \cos(x-y^2) & -2xy \cos(x-y^2) \end{bmatrix}$$

και $Df(1,1) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ αντιστρέψιμος πίνακας. Άρα

υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ τ.ω $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Omega, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \tilde{\Omega}$

και η $f: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ να είναι μία αμφιδιαφορέα κλάσης C^∞ .

Εκινάει για τιμές των (u,v) στο $\tilde{\Omega}$ το σύστημα έχει μία

μοναδική λύση $\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = f^{-1}(u,v)$ στο Ω . Θεωρώντας $g = f^{-1}: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$

$$\text{έχουμε } Dg|_{(0,0)} = (Df(1,1))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{'Αρα } Du|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Dv|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Θέμα 3 α) προσδιορίστε το πολυώνυμο $P(x,y)$, δεύτερου βαθμού ως προς x , και y όταν το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{e^{xy} \cos x - P(x,y)}{x^2 + (y-1)^2} = 0$

Λύση: Το πολυώνυμο $P(x,y)$ είναι το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού της $f(x,y) = e^{xy} \cos x$ στο σημείο $(0,1)$. Έχουμε

$$P(x,y) = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1)x(y-1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)(y-1)^2$$

Υπολογίζουμε λοιπόν $f(0,1) = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} \cos x - e^{xy} \sin x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} \cos x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 e^{xy} \cos x - 2ye^{xy} \sin x - e^{xy} \cos x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy} \cos x + xy e^{xy} \cos x - x e^{xy} \sin x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy} \cos x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0$$

Αρα $P(x,y) = 1 + x + x|y-1| = xy + 1$

β) Έστω $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Να δείχθει ότι $\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{a}{e}$

με $a > b > 0$

Λύση: Παρατηρούμε πρώτα ότι $0 \leq f(x,y) \leq a(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} \xrightarrow{\| (x,y) \| \rightarrow \infty} 0$, άρα

το μέγιστο της f λαμβάνεται στον ανοικτό δίσκο $D(0,R)$, με

$R > 0$ αρκετά μεγάλο, σε ένα από τα κριτικά σημεία της f .

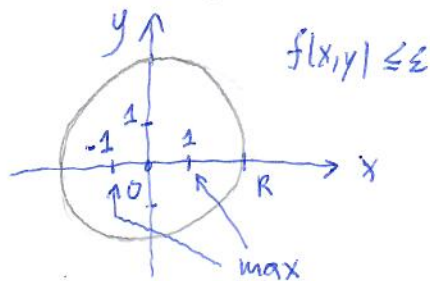
Υπολογίζουμε $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (2ax - 2x(ax^2 + by^2))e^{-(x^2+y^2)} \\ (2by - 2y(ax^2 + by^2))e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a - (ax^2 + by^2)) = 0 \\ \text{και} \\ y(b - (ax^2 + by^2)) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ή } ax^2 + by^2 = a \\ \text{και} \\ y=0 \text{ ή } ax^2 + by^2 = b \end{cases}$. Έχουμε λοιπόν τα εξής κριτικά σημεία:

1) $(x,y) = (0,0)$, $f(0,0) = 0$ 2) $(x,y) = (0, \pm 1)$, $f(0, \pm 1) = \frac{b}{e}$

3) $(x,y) = (\pm 1, 0)$, $f(\pm 1, 0) = \frac{a}{e}$

Επομένως $\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = f(\pm 1, 0) = \frac{a}{e}$



Θέμα 4: Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό συνεκτικό χωρίο και $f \in C^2(U)$ μια συνάρτηση που ικανοποιεί $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ στο U .

α) Να δείχθει ότι υπάρχει μια συνάρτηση $g \in C^2(U)$ που ικανοποιεί

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{και} \quad \Delta g = 0 \quad \text{στο } U.$$

β) Αν $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ και $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, να προσδιοριστεί η g .

Λύση α) Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\vec{G} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial y \\ -\partial f / \partial x \end{pmatrix}$ που είναι

κλάσης C^1 στο U . Προφανώς ισχύει

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \text{στο } U \text{ (δηλ. συνεκτικό)}, \quad \text{άρα υπάρχει } g \in C^2(U)$$

$$\text{π.ω. } \vec{G} = \nabla g \text{ στο } U \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{στο } U$$

$$\text{Επιπλέον, η } g \text{ είναι αρμονική στο } U, \text{ διότι } \Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

β) Για να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση g π.ω.

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ \frac{\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

ολοκληρώνουμε ως προς x την εξίσωση $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Βρίσκουμε

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \varphi(y) \quad \text{και πρέπει επίσης να ισχύει}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{y}{x^2 + y^2} + \varphi'(y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \varphi'(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \text{const}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $g(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \text{const.}$

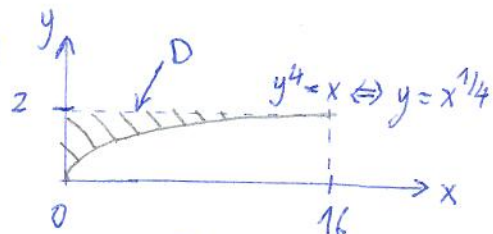
Θέμα 5 : α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{16} \left(\int_{x^{1/4}}^2 \frac{dy}{y^5+1} \right) dx = I$

Λύση: Έχουμε $I = \iint_D \frac{1}{y^5+1} dx dy$

όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,16], x^{1/4} \leq y \leq 2\}$ y -αηλό

και παρατηρούμε ότι το D είναι επίσης x -αηλό:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2], 0 \leq x \leq y^4\}$$



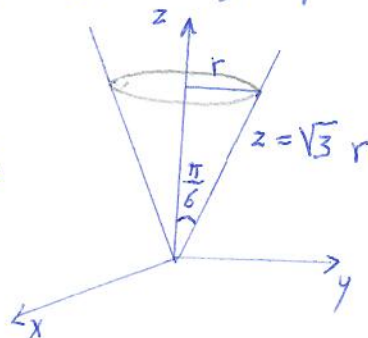
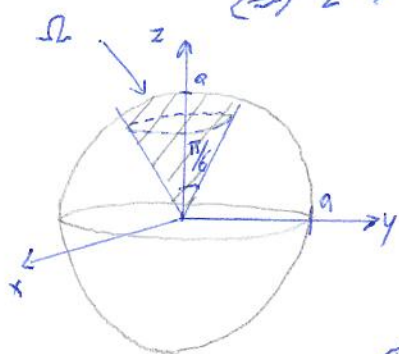
Άρα $I = \int_0^2 \left(\int_0^{y^4} \frac{dx}{y^5+1} \right) dy = \int_0^2 \frac{y^4}{y^5+1} dy = \left[\frac{1}{5} \ln(y^5+1) \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{5} \ln 33$

β) Να σχεδιαστεί το στερεό $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq a^2, z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$ ($a > 0$), και να υπολογιστεί ο όγκος του.

Λύση: Το στερεό Ω είναι η τομή της μιάλης ακτίνας a με κέντρο το $\vec{0}$,

με τον κώνο $z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}$

$$\Leftrightarrow z \geq \sqrt{3} r \text{ όπου } r = \sqrt{x^2+y^2}$$



Χρησιμοποιώντας τον γ -εφαπτικό μετριοχηματισμό

$$T(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ έχουμε } T(\Omega^*) = \Omega$$

όπου $\Omega^* = \{(\rho, \theta, \varphi) : \rho \in [0,a], \theta \in [0,2\pi], \varphi \in [0, \frac{\pi}{6}]\}$. Άρα

$$\begin{aligned} \text{Όγκος}(\Omega) &= \iiint_{[0,a] \times [0,2\pi] \times [0, \frac{\pi}{6}]} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/6} \rho^2 \sin \varphi \, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho \\ &= \left[-\rho^2 \cos \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/6} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rho^2 \end{aligned}$$

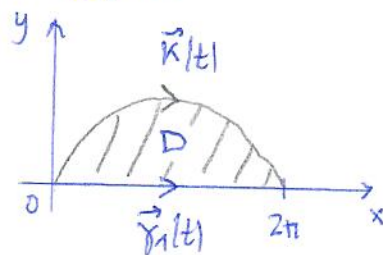
$$\Rightarrow \text{Όγκος}(\Omega) = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rho^2 d\theta \right) d\rho = \int_0^a \pi (2 - \sqrt{3}) \rho^2 d\rho = \frac{\pi a^3}{3} (2 - \sqrt{3}).$$

Παρατήρηση: Ο όγκος του Ω υπολογίζεται επίσης χρησιμοποιώντας τις κυλινδρικές συντεταγμένες

Θέμα 6: Έστω $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. Επαληθεύστε ότι η $\vec{r}(t)$ είναι μία αηδή καμπύλη τ.ω. $\vec{r}(0) = (0, 0)$, $\vec{r}(2\pi) = (2\pi, 0)$ και $x'(t) = y(t) > 0$, $\forall t \in (0, 2\pi)$. Εν συνεχεία, υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου D που φράσσεται από πάνω από την καμπύλη $\vec{r}(t)$ και από κάτω από τον άξονα των x .

Λύση: Είναι φανερό ότι $\vec{r}(0) = (0, 0)$, $\vec{r}(2\pi) = (2\pi, 0)$ και $x'(t) = y(t) > 0$, $\forall t \in (0, 2\pi)$. Η $\vec{r}(t)$ είναι αηδή καμπύλη επειδή η συνάρτηση $\underset{[0, 2\pi]}{t} \mapsto x(t)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Το χωρίο D φράσσεται από πάνω από την καμπύλη $\vec{r}(t)$ και από κάτω από την καμπύλη $\vec{r}_1(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$



Εφαρμόζοντας τον τύπο του Green για το χωρίο D και

το διανυσματικό πεδίο $\begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$, βρίσκουμε

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\vec{r}_1} P dx \uparrow \int_{\vec{r}} P dx$$

$\iint_D dx dy = \text{Εμβαδόν}(D)$ διότι η $\vec{r}$ έχει τον ωρολόγιο προσανατολισμό.

Επιπλέον, έχουμε $\int_{\vec{r}_1} P dx = 0$ διότι $P(x, 0) = 0$

$$\text{και } \int_{\vec{r}} P dx = \int_0^{2\pi} (-y(t)) x'(t) dt = - \int_0^{2\pi} (y(t))^2 dt = - \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt$$

$$\Rightarrow \int_R p \, dx = - \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \, dt = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 2t}{2} - 2\cos t \right) \, dt = -3\pi$$

$\uparrow$
 $\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}$

Άρα Εμβαδόν(D) = 3π

Θέμα 7: Έστω S η τομή του επιπέδου $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + 2y\}$

με τον κύλινδρο $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Η καμπύλη κλειστή

καμπύλη $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, 2\cos t + 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

φράσσει την επιφάνεια S και έχει θετική φορά ως προς το μοναδιαίο κάθετο

διάνυσμα $\vec{n} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ στο επίπεδο $z = 2x + 2y$. Επιδείξτε

τον τύπο του Stokes

$$\iint_S (\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n}) \, dS = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{όπου } \vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \text{ και } \text{curl } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

για την επιφάνεια S και το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz - y \\ xz + x \\ z^3 \end{pmatrix}$$

Λύση Υπολογίζουμε πρώτα το επιφανειακό ολοκλήρωμα. Έχουμε

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{2x - zy + 2}{3}. \quad \text{Έπειτα, θεωρούμε}$$

την παραμετρization $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ της επιφάνειας S, όπου

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = 2x + 2y \end{pmatrix}$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, ο μοναδιαίος δίσκος. Υπολογίζουμε

Το εμβαδόν επιφάνειας S : $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
 $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = 3$ και $dS = 3 dx dy$.

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\iint_S (\text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_D \left(\frac{2x - 2y + 2}{3} \right) 3 dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2\pi$$

επειδή $\iint_D x dx dy = \iint_D y dx dy = 0$ λόγω συμμετρίας.

Τώρα υπολογίζουμε το επικαμπύριο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} (y(t)(z(t)-1)x'(t) + x(t)(z(t)+1)y'(t)) dt + \underbrace{\int_0^{2\pi} z^3(t)z'(t) dt}_{= \left[\frac{1}{4} z^4(t) \right]_0^{2\pi} = 0} \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t (z(t)-1) + \cos^2 t (z(t)+1)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} z(t) (\cos^2 t - \sin^2 t) dt + \int_0^{2\pi} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos t + 2\sin t) (\cos^2 t - \sin^2 t) dt + 2\pi \\ &= \int_0^{2\pi} 2\cos t (1 - 2\sin^2 t) dt + \int_0^{2\pi} 2\sin t (2\cos^2 t - 1) dt + 2\pi \\ &= \left[2\sin t - \frac{4}{3} \sin^3 t - \frac{4}{3} \cos^3 t + 2\cos t \right]_0^{2\pi} + 2\pi \\ &= 0 + 2\pi = 2\pi \end{aligned}$$