

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B, 10)$ όπου B ($0 \leq B \leq 12$) το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή Επιτυχία!

Θέμα 1 [2 βαθμοί]: Για $\alpha > 0$ θεωρήστε τη συνάρτηση $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Για ποιες τιμές του α η f_α είναι συνεχής στο $(0, 0)$; Για ποιες τιμές του α είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$; Υπολογίστε το διαφορικό της f_α στο σημείο $(1, -1)$.

Θέμα 2 [1,5 βαθμοί]: α) Εξετάστε αν υπάρχει μία C^∞ τοπική λύση $y = \phi(x)$ της εξίσωσης $x + y + x \sin y = 0$ στο σημείο $(0, 0)$ και υπολογίστε την παράγωγο $\phi'(0)$. β) Βρείτε τα σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ στα οποία η συνάρτηση $f(x, y) = (xe^y, xe^{-y})$ ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) είναι τοπικά αντιστρέψιμη.

Θέμα 3 [1,5 βαθμοί]: Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 + 2y$ για $x^2 + y^2 \leq 1$.

Θέμα 4 [1,5+1,5 βαθμοί]: α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y dx}{(1+x^5)^7} \right) dy.$$

β) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού $S \subset \mathbb{R}^3$ που περικλείεται ανάμεσα στις επιφάνειες $z = x^2 + y^2$ και $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Θέμα 5 [2 βαθμοί]: Έστω $a > 0$. Να υπολογιστεί το μήκος της κλειστής καμπύλης $\vec{\gamma}(\theta) = (a(\cos \theta)^3, a(\sin \theta)^3)$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) και το εμβαδόν του χωρίου $D = \text{int}(\vec{\gamma})$.

Θέμα 6 [2 βαθμοί]: α) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (P, Q, R) = (y, z \cos(yz) + x, y \cos(yz))$ ($(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$) είναι συντηρητικό. β) Προσδιορίστε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν $\nabla f = \vec{F}$ στο $\mathbb{R}^3$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Κυλινδρικές συντεταγμένες: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, $dx dy dz = r dr d\theta dz$. Σφαιρικές συντεταγμένες: $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$, $z = \rho \cos \phi$, $dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$.

Τύπος του Green:

$$\int \int_{\text{int}(\vec{\gamma})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{\vec{\gamma}} (P dx + Q dy), \text{ όπου η απλή κλειστή καμπύλη } \vec{\gamma} \text{ έχει τον αντιωρολόγιο προσανατολισμό.}$$

Θέμα 1: Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$ για $\alpha \in (0,1)$.

Πρώτα έχουμε για $\alpha \in (0,1)$:

$$\left| f_{\alpha}(x,y) - f_{\alpha}(0,0) \right| = \frac{|x||y|}{(x^2+y^2)^{\alpha}} \leq \frac{(x^2+y^2)^{1-\alpha}}{(x,y) \rightarrow (0,0)} \rightarrow 0.$$

↑
επειδή $|x||y| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$

• Αν όμως $\alpha \in [1, +\infty)$, η f_{α} δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$

Δότι για $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(\lambda, \lambda) = \frac{\lambda^2(1-\alpha)}{2^{\alpha}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 = f(0,0).$
 $\lambda \neq 0$

• Παρατηρούμε επίσης ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ υπάρχουν και μηδενίζονται διότι $f_{\alpha}(x,0) = f_{\alpha}(0,y) = 0$.

Για να είναι η f_{α} διαφορίσιμη στο $(0,0)$ πρέπει να έχουμε

$$\frac{f_{\alpha}(x,y) - f_{\alpha}(0,0) - \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}} = 0$. Όπως και προηγουμένως μπορούμε να δούμε ότι αυτό ισχύει ΑΝΝ $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

• Για το διαφορικό της f_α στο σημείο $(1, -1)$ υπολογίζουμε

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^\alpha} - \frac{\alpha xy}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \cdot 2x = \frac{x^2 y (1-2\alpha) + y^3}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}}$$

(0,0)

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^\alpha} - \frac{\alpha xy}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \cdot 2y = \frac{x^3 + (1-2\alpha)xy^2}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}}$$

#

$$\Rightarrow \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(1, -1) = \frac{\alpha-1}{2^\alpha}, \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(1, -1) = \frac{1-\alpha}{2^\alpha}$$

$$\text{Άρα } Df_\alpha(-1, 1) = \left[\frac{\alpha-1}{2^\alpha} \quad \frac{1-\alpha}{2^\alpha} \right] \quad (\text{πίνακας γραμμών})$$

ΑΣΚ Εξετάστε αν υπάρχει μια C^∞ τοπική λύση $y = \varphi(x)$ της εξίσωσης $x + y + x \sin y = 0$ στο σημείο $(0,0)$ και υπολογίστε την παράγωγο $\varphi'(0)$

Λύση Η συνάρτηση $f(x,y) = x + y + x \sin y$ είναι C^∞ στο $\mathbb{R}^2$

και έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + \sin y$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + x \cos y$

Εξ' άλλου παρατηρούμε ότι $f(0,0) = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$.

Έπειτα λοιπόν από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης ότι υπάρχει ένα διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ και μια συνάρτηση $\varphi \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon))$ τ.ω.

$\varphi(0) = 0$ και $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow x + \varphi(x) + x \sin \varphi(x) = 0$

Η παράγωγος $\varphi'(0)$ βρίσκεται από τον τύπο $\varphi'(0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = \frac{-1}{1} = -1$

Για να βρούμε την $\varphi'(0)$ μπορούμε επίσης να παραγωγίσουμε ως προς x

την εξίσωση $x + \varphi(x) + x \sin \varphi(x) = 0$

Έτσι έχουμε $1 + \varphi'(x) + \sin \varphi(x) + x \varphi'(x) \cos \varphi(x) = 0$

και για $x=0$ $1 + \varphi'(0) + \sin \varphi(0) + 0 \cdot \varphi'(0) \cos \varphi(0) = 0$

$$\Rightarrow \varphi'(0) = -1$$

ΑΣΚ Βρείτε τα σημεία (x, y) στα οποία η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x e^y \\ x e^{-y} \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ είναι αντιστρέψιμη και}$$

υπολογίστε το διαφορικό της αντίστροφης τοπικής αντίστροφης g .

Λύση Έχουμε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ και

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} e^y & x e^y \\ e^{-y} & -x e^{-y} \end{bmatrix} \text{ και } \det(Df(x, y)) = -2x.$$

Ετσι η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στα σημεία (x, y) με $x \neq 0$

και το διαφορικό της τοπικής αντίστροφης συνάρτησης $g = f^{-1}$ είναι

$$Dg(f(x, y)) = Dg(x e^y, x e^{-y}) = -\frac{1}{2x} \begin{bmatrix} -x e^{-y} & -x e^y \\ -e^{-y} & e^y \end{bmatrix}$$

Στα σημεία $(0, y_0)$ η f δεν είναι τοπικά αντιστρέψιμη

γιατί ισχύει $\prod_{\mathbb{R}} f(0, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$, άρα αν

θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε μπάλα $B((0, y_0), \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$)

με κέντρο το σημείο $(0, y_0)$, ο περιορισμός της f στη

$B((0, y_0), \varepsilon)$ δεν είναι 1-1.

Πρόβλημα 3 : • Επειδή ο κλειστός δίσκος $x^2 + y^2 \leq 1$

είναι συμπαγής, η f λαμβάνει το μέγιστό της σε κάποιο

σημείο του κλειστού δίσκου. Μελετούμε πρώτα την f
στο σύνορο δηλαδή πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$
(που είναι
(επίσης συμπαγής)). Έχουμε

$$\max_{x^2+y^2=1} f(x,y) = \max_{x^2+y^2=1} 3x^2 - 2y^2 + 2y = \max_{x^2+y^2=1} 3 - 5y^2 + 2y$$

$$= \max_{y \in [-1,1]} 3 - 5y^2 + 2y = \frac{16}{5}$$

$$\text{Επειδή η } \varphi(y) = 3 - 5y^2 + 2y \text{ έχει max για } y = \frac{1}{5}$$

$$\text{και } \varphi\left(\frac{1}{5}\right) = 3 - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{16}{5}$$

Έπειτα, αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του δίσκου:
(που είναι πιθανές θέσεις των ακροτήτων)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x \\ -4y + 2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow (x,y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η f δεν λαμβάνει το max στο

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ διότι } f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} < \frac{16}{5}. \text{ Άρα η } f \text{ λαμβάνει}$$

$$\text{το max στο σύνορο και έχουμε } \max_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) = \frac{16}{5}$$

ΑΣΚ Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{(1+x^5)^7} dx \right) dy$

Λύση: Έχουμε $I = \iint_D \frac{y}{(1+x^5)^7} dx dy$ όπου το χωρίο

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], \sqrt{y} \leq x \leq 1\} \text{ είναι } x\text{-αηλό'}$$

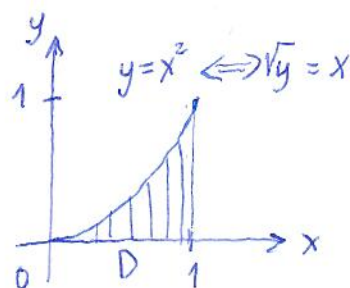
Παρατηρούμε ότι το D είναι επίσης y -αηλό' και γράφεται

$$\text{στη μορφή } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Έτσι το ολοκλήρωμα υπολογίζεται πιο εύκολα

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{y}{(1+x^5)^7} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2(1+x^5)^7} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^4}{2(1+x^5)^7} dx \end{aligned}$$

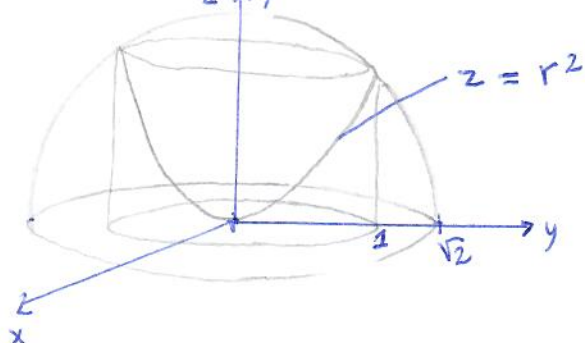
$$= \left[-\frac{1}{60} (1+x^5)^{-6} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{21}{1280}$$



ΑΕΚ

Να βρείτε τον όγκο μεταξύ των επιφανειών $x^2 + y^2 = z$

και $x^2 + y^2 + z^2 = 2$



Λύση Χρησιμοποιούμε τις

κυλινδρικές συντεταγμένες

για να οριοθετήσουμε το χωρίο

$$D \text{ μεταξύ των επιφανειών } \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = r^2 \end{cases} \text{ και } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = \sqrt{2 - r^2} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο επιφάνειες αυτές τέμνονται όταν

$$r^2 = \sqrt{2 - r^2} \Leftrightarrow r^4 = 2 - r^2 \Leftrightarrow r = 1$$

Επομένως, έχουμε $D = \{(r, \theta, z) : r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], r^2 \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}\}$

και

$$\text{όγκος}(D) = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r \, dz \right)}_{= (r\sqrt{2-r^2} - r^3)} d\theta \right) dr = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} (r\sqrt{2-r^2} - r^3) d\theta \right)}_{= 2\pi (r\sqrt{2-r^2} - r^3)} dr$$

$$= \int_0^1 2\pi (r\sqrt{2-r^2} - r^3) dr = 2\pi \left[-\frac{(2-r^2)^{3/2}}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} \\ = \frac{\pi}{3} \left(4\sqrt{2} - \frac{7}{2} \right)$$

ΑΣΚ : Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \cos(yz) + x \\ y \cos(yz) \end{pmatrix}$

είναι συντηρητικό και βρείτε μία συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ τ.ω $\vec{F} = \nabla f$.

Λύση : υπολογίζουμε $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$,

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \cos(yz) - yz \sin(yz), \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \cos(yz) - yz \sin(yz)$$

και βλέπουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$
στο $\mathbb{R}^3$ (που είναι απλά συνεκτικό), άρα το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

Για να προσδιορίσουμε μία συνάρτηση f τ.ω. $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{F}$,

ολοκληρώνουμε ως προς y την εξίσωση $\frac{\partial f}{\partial y} = Q = z \cos(yz) + x$.

Βρίσκουμε $f(x, y, z) = \sin(yz) + xy + \varphi(x, z)$ και πρέπει επίσης να ισχύει

$$\bullet \quad \frac{\partial f}{\partial x} = P \Leftrightarrow y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z) = y \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x, z) = \psi(z)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R \Leftrightarrow y \cos(yz) + \psi'(z) = y \cos(yz) \Leftrightarrow \psi'(z) = 0 \Leftrightarrow \psi(z) = c_1 z + c_2$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\vec{F}|_{\mathbb{R}^3} = \nabla f|_{\mathbb{R}^3}$ στο $\mathbb{R}^3$ με

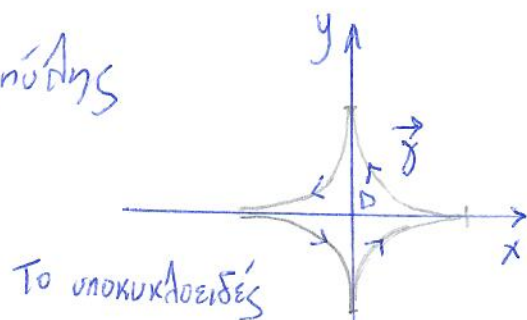
$$f(x, y, z) = \sin(yz) + xy + c_1 z + c_2$$

ΑΣΚ 2 Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης

$$\vec{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} a \cos^3 \theta \\ a \sin^3 \theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi], a > 0,$$

και το εμβαδόν του χωρίου $D = \text{int}(\vec{\gamma})$

Λύση: Έχουμε $\vec{\gamma}'(\theta) = \begin{pmatrix} -3a \cos^2 \theta \sin \theta \\ 3a \sin^2 \theta \cos \theta \end{pmatrix}$



$$\begin{aligned} \text{και } \|\vec{\gamma}'(\theta)\| &= 3a \sqrt{\cos^4 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \cos^2 \theta} = 3a |\cos \theta \sin \theta| \\ &= 3a \cos^2 \theta \sin^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Άρα $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{μήκος της } \vec{\gamma}}}{L(\vec{\gamma})} = \int_0^{2\pi} 3a |\cos \theta \sin \theta| d\theta = 12a \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta$

$$= 6a \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6a$$

Εφαρμόσουμε τον τύπο του Green στην αλληλ κλειστή καμπύλη $\vec{\gamma}$ (που έχει τον αντιπροσώγειο προσανατολισμό), επιλέγοντας το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \text{ Έχουμε λοιπόν}$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\vec{\gamma}} -y dx + x dy = \int_0^{2\pi} 3a^2 (\sin^4 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta \sin^2 \theta) d\theta$$

$$\stackrel{\text{II}}{=} 3a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{3a^2}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta$$

$$\stackrel{\text{εμβαδόν}}{=} \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{3}{4} a^2 \pi$$

$$\uparrow \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

Άρα $E(D) = \frac{3}{8} a^2 \pi$