

Άλγεβρα II 2024–25

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

- (1) Έστω $R := \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ο δακτύλιος των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$. Η αβελιανή ομάδα $\text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ είναι R -πρότυπο. Έστω $m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$.
- i) Δείξτε ότι $M = (m)$.
 - ii) Δείξτε ότι $\text{Ann}_R(M) = 0$ και $\text{Ann}_R(m) \neq 0$.
- (2) Έστω $L \leq N \leq M$. Δείξτε ότι $(M/L)/(N/L) \cong M/N$ (3ο Θεώρημα Ισομορφισμών Προτύπων).
- (3) Έστω $N \leq M$ τέτοιο ώστε το N και το M/N είναι πεπερασμένα παραγόμενα. Δείξτε ότι το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.
- (4) Έστω $L, N \leq M$. Δείξτε ότι αν τα $L + N, L \cap N$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα, τότε και τα L, N είναι πεπερασμένα παραγόμενα.
- (5) Έστω M ένα R -πρότυπο. Δείξτε ότι το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο αν και μόνο αν υπάρχει επιμορφισμός R -προτύπων $f : R^n \rightarrow M$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$.
- (6) Δείξτε ότι $\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}^2$ ως $\mathbb{Z}$ -πρότυπα, αλλά όχι ως δακτύλιοι.
- (7) Έστω R περιοχή. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν μη μηδενικά ιδεώδη I, J του R τέτοια ώστε $R = I \oplus J$.
- (8) Έστω $M_1, \dots, M_t \leq M$. Δείξτε ότι $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t$ αν και μόνο αν $M = M_1 + \dots + M_t$ και $M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}$ για κάθε $i = 1, \dots, t$.