

Άλγεβρα II 2023–24

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

(1) Έστω $\mathbb{H} := \mathbb{Q}1 \oplus \mathbb{Q}i \oplus \mathbb{Q}j \oplus \mathbb{Q}k$ με πολλαπλασιασμό που δίνεται από τις σχέσεις $i^2 = -1$, $j^2 = -1$ και $ij = -ji = k$. Δείξτε ότι ο $\mathbb{H}$ είναι δακτύλιος διαίρεσης. Δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $\mathbb{Q}$ με $\mathbb{Z}$. Στην περίπτωση αυτή βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία.

(2) Δείξτε ότι ένας μη μηδενικός δακτύλιος R είναι δακτύλιος διαίρεσης αν και μόνο αν έχει 2 αριστερά ιδεώδη.

(3) Δείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο. Έστω

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & n \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Δείξτε ότι ο R είναι υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{Q})$ και ότι για κάθε $\mathbb{Z}$ -υποπρότυπο M του $\mathbb{Q}$, το σύνολο

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι δεξιό ιδεώδες του R . Δείξτε ότι

- i) ο R είναι αριστερός δακτύλιος της *Noether*.
- ii) ο R δεν είναι δεξιός δακτύλιος της *Noether*.
- iii) ο R δεν είναι αριστερός δακτύλιος του *Artin*.
- iv) ο R δεν είναι δεξιός δακτύλιος του *Artin*.