

Άλγεβρα II 2024–25

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

- (1) Έστω R δακτύλιος με μονάδα και $n \in \mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι τα αριστερά ιδεώδη του $M_n(R)$ είναι της μορφής

$$M_{n \times 1}(I) = \left\{ \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} \mid \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in I \right\},$$

όπου I είναι αριστερό R -υποπρότυπο του R^n (αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για τα δεξιά ιδεώδη).

- (2) Έστω D ένας δακτύλιος διαίρεσης.

- i) Δείξτε ότι το κέντρο του D είναι ένα σώμα K , και άρα ο D είναι K -άλγεβρα.
- ii) Έστω ότι ο D είναι άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης επί ενός αλγεβρικά κλειστού σώματος K . Δείξτε ότι $D = K$.
- iii) Αν K είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα και A είναι μια πεπερασμένης διάστασης K -άλγεβρα, τότε η A είναι ημιαπλή αν και μόνο αν είναι ισόμορφη με το γινόμενο αλγεβρών πινάκων με συντελεστές στο K .

- (3) Ταξινομήστε (ως προς ισομορφισμό) όλες τις ημιαπλές $\mathbb{C}$ -άλγεβρες διάστασης 8.