

Άλγεβρα II 2024–25

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Στη συνέχεια με $J(R)$ συμβολίζουμε το ριζικό *Jacobson* ενός δακτυλίου R .

- (1) Να δείξετε ότι όλα τα μηδενοδύναμα στοιχεία ενός μεταθετικού δακτυλίου R ανήκουν στο $J(R)$. Ισχύει το ίδιο για μη μεταθετικούς δακτύλιους;
- (2) Έστω R δακτύλιος με μονάδα και $n \in \mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι $J(M_n(R)) = M_n(J(R))$. Ειδικότερα, αν D είναι δακτύλιος διαίρεσης, τότε ο δακτύλιος $M_n(D)$ είναι J -ημιαπλός.
- (3) Έστω R δακτύλιος με μονάδα τέτοιος ώστε ο δακτύλιος $R^\times \cup \{0\}$ είναι δακτύλιος διαίρεσης (όπου με $R^\times$ συμβολίζουμε το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του R). Δείξτε ότι ο R είναι J -ημιαπλός.
- (4) Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $R[X]$ ο αντίστοιχος δακτύλιος πολυωνύμων. Θεωρούμε τον R ως τον υποδακτύλιο του $R[X]$ που αποτελείται από τα σταθερά πολυώνυμα.
 - i) Να δείξετε ότι για κάθε μηδενοδύναμο ιδέωδες $I \subseteq R$ ισχύει ότι $I[X] \subseteq J(R[X])$.
 - ii) Να δείξετε ότι το $R \cap J(R[X])$ είναι ένα νιλ ιδεώδες του R .