

Άλγεβρα II 2024–25

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

(1) Θυμίζουμε ότι

$$S_3 = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^3 = 1 \rangle.$$

i) Δείξτε ότι υπάρχουν αναπαραστάσεις $(\mathbb{C}^2, \rho_1), (\mathbb{C}^2, \rho_2), (\mathbb{C}^2, \rho_3)$ με

$$\rho_1(s_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_1(s_2),$$

$$\rho_2(s_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho_2(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3(s_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho_3(s_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

ii) Δείξτε ότι $(\mathbb{C}^2, \rho_2) \cong (\mathbb{C}^2, \rho_3)$.

iii) Δείξτε ότι $(\mathbb{C}^2, \rho_1) \not\cong (\mathbb{C}^2, \rho_2)$ (χωρίς να χρησιμοποιήσετε το επόμενο ερώτημα).

iv) Δείξτε ότι η αναπαράσταση $(\mathbb{C}^2, \rho_1)$ δεν είναι ανάγωγη, αλλά η $(\mathbb{C}^2, \rho_2)$ είναι.

(2) Δείξτε ότι η συμμετρική ομάδα S_n έχει μόνο 2 αναπαραστάσεις διάστασης 1.

(3) Έστω $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ δύο αναπαραστάσεις μιας πεπερασμένης ομάδας G επί ενός σώματος k . Δείξτε ότι οι χώροι $V_1 \oplus V_2$ και $\text{Hom}_k(V_1, V_2)$ είναι αναπαραστάσεις της G για τους ομομορφισμούς που δόθηκαν στο Μάθημα 12. Υπολογίστε τους χαρακτήρες αυτών των αναπαραστάσεων βάσει των χαρακτήρων των αναπαραστάσεων $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$

(4) Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα. Θα γράφουμε $g \sim g'$ αν τα g, g' είναι συζυγή, δηλαδή αν υπάρχει $h \in G$ τέτοιο ώστε $g' = hgh^{-1}$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(G, k)$ την k -άλγεβρα των συναρτήσεων από την G στο k και με $\mathcal{F}(G/\sim, k)$ την υποάλγεβρα των κεντρικών συναρτήσεων, δηλαδή των συναρτήσεων που είναι σταθερές στις κλάσεις συζυγίας.

i) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\sigma : \mathcal{F}(G, k) \rightarrow \mathcal{F}(G, k), F \mapsto (g \mapsto F(g^{-1}))$$

είναι αυτομορφισμός του διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(G, k)$ που διατηρεί σταθερό τον υπόχωρο $\mathcal{F}(G/\sim, k)$.

ii) Δείξτε ότι ο υπόχωρος $\text{Char}(G)$ που παράγεται από τους χαρακτήρες της G είναι k -υποάλγεβρα της $\mathcal{F}(G/\sim, k)$ που διατηρείται σταθερή από τη σ .

iii) Ας θεωρήσουμε ότι η χαρακτηριστική του k δε διαιρεί την τάξη της G . Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\langle, \rangle : \mathcal{F}(G, k) \times \mathcal{F}(G, k) \rightarrow k, (F, F') \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} F(g) F'(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} F(g) \sigma(F')(g)$$

είναι μια μη εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική απεικόνιση, της οποίας ο περιορισμός στις κεντρικές συναρτήσεις είναι επίσης μη εκφυλισμένος.