$\boxed{\text{χαρ } k \nmid |G|}$

Θεώρημα Maschke

Έστω (V,ρ) αναπαράσταση της G και $W \leq V$ υποαναπαράσταση
Τότε υπάρχει W' υποαναπαράσταση της V τ.ώ. $V = W \oplus W'$

Απόδ Έστω W' υπόχωρος του V τ.ώ. $V = W \oplus W'$ ως διαν. χώροι
Έστω $p: V \longrightarrow V$ η προβολή στο W. Έχουμε $p \in \mathrm{End}_k(V)$
Με τους συμβολισμούς της προηγούμενης φοράς, θέτουμε

$$q := p_{\mathrm{End}_k(V)}(p) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g^{-1}) \in \mathrm{End}_k(V)$$

Έχουμε

$$q \in \mathrm{End}_k(V)^G \overset{\text{Λήμμα}}{=} \mathrm{End}_{kG}(V)$$

Επίσης $W \subseteq \mathrm{Im}\, q$, αφού για κάθε $w \in W$

$$q(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \cancel{p} \circ \rho(g^{-1})(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w = w$$

Τώρα, για κάθε $v \in V$, έχουμε:

$$q(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{\rho(g) \circ \underbrace{p \circ \underbrace{\rho(g^{-1})(v)}_{\in V}}_{\in W}}_{\in W} \in W \Rightarrow \mathrm{Im}\, q \subseteq W$$

Τέλος $q(\underbrace{q(v)}_{\in W}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} q(v) = q(v)$

Άρα η q είναι προβολή kG-προτύπων, οπότε έχουμε

$$V = \mathrm{Im}\, q \oplus \mathrm{Ker}\, q = W \oplus \mathrm{Ker}\, q$$

Πόρισμα: Αν $\chi\alpha\rho\, k \nmid |G|$, η άλγεβρα kG είναι ημιαπλή

$\Updownarrow$

κάθε kG-πρότυπο είναι ημιαπλό

Πόρισμα Κάθε αναπαράσταση της G γράφεται ως ευθύ άθροισμα αναγωγων αναπαραστάσεων

Ορισμός: Μια αναπαράσταση V ονομάζεται ημιαπλή αν για κάθε υποαναπαράσταση W υπάρχει υποαναπαράσταση W' τ.ω. $V = W \oplus W'$.

Ορισμός: Μια αναπαράσταση V ονομάζεται αδιάσπαστη (indecomposable) αν όποτε $V = V_1 \oplus V_2$ $(V_i \leq V)$ έχουμε $V_1 = 0$ ή $V_2 = 0$.

Παρατήρηση: $V \neq 0$

V ανάγωγη $\Rightarrow$ V αδιάσπαστη ΠΑΝΤΑ

Αν $\chi\alpha\rho k \nmid |G|$, τότε V αδιάσπαστη $\Rightarrow$ V ανάγωγη

$$\mathrm{Irr}(kG) := \{V \text{ ανάγωγη αναπαρ. της } G\}/_{\cong}$$

$$\updownarrow$$

$$\{\chi : G \to k \text{ ανάγωγος χαρακτήρας}\}$$

Εχουμε $|\mathrm{Irr}(kG)| < \infty$

Θ. Artin-Wedderburn $\Longrightarrow$ $kG \cong \prod_{V_i \in \mathrm{Irr}(kG)} \mathrm{Mat}_{n_i}(\underbrace{\mathrm{End}_{kG}(V_i)}_{\text{δακτύλιος διαίρεσης}})$

όπου $kG = \bigoplus_{V_i \in \mathrm{Irr}(kG)} n_i V_i$

Αν <u>k αλγεβρικά κλειστό</u>, $kG \cong \prod_{V_i \in \mathrm{Irr}(kG)} \mathrm{Mat}_{n_i}(k)$

Από εδώ και στο εξής $k = \mathbb{C}$

$\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G) = \{ V_1, V_2, \dots, V_t \}$

Σχέσεις ορθογωνιότητας χαρακτήρων :

$\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = \delta_{ij}$

Αν $V = \bigoplus n_i V_i$, V_i ανάγωγες αναπαραστάσεις

τότε $\langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle = n_i$

$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum n_i^2$

Έχουμε δει ήδη ότι $\langle \chi_{V_{reg}}, \chi_V \rangle = \dim V = \chi_V(1)$

οπότε αν $\underset{\mathbb{C}G}{\overset{\parallel}{V^{reg}}} = \bigoplus n_i V_i$ τότε $n_i = \dim V_i$

Οπότε $\mathbb{C}G \cong \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$ όπου $n_i = \dim V_i$

Επίσης $|G| = \dim V^{reg} = \langle \chi_{V_{reg}}, \chi_{V_{reg}} \rangle = \sum_{i=1}^{m} (\dim V_i)^2$

Εφαρμογή: Αν $|G| \leq 4$, τότε όλες οι ανάγωγες αναπαραστάσεις είναι διάστασης 1