<u>Πρόταση</u> : Έστω $g \in G$ και $C(g)$ η κλάση συζυγίας του στην G.

Εστω $Irr(\mathbb{C}G) = \{\chi_1, \dots, \chi_t\}$

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} \overline{\chi_i(g)}\chi_i(g) = \frac{|G|}{\# C(g)}$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} \overline{\chi_i(g)}\chi_i(h) = 0 \quad \forall\, h \in G \setminus C(G)$

<u>Αποδ</u> Εστω $f = \psi_{C(G)} : G \longrightarrow k$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in C(G) \\ 0 & \text{αν } x \notin C(G) \end{cases}$$

Αφου $Irr(\mathbb{C}G)$ είναι βάση του $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$, υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{C}$ τ.ω.

$f = \displaystyle\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \chi_i$

με $\lambda_i = \langle f, \chi_i \rangle = \dfrac{\# C(g)}{|G|} \overline{\chi_i(g)}$

Οποτε, για κάθε $x \in G$, έχουμε

$$f(x) = \frac{\# C(g)}{|G|} \sum_{i=1}^{t} \overline{\chi_i(g)}\chi_i(x)$$

Αν $x = g$ παίρνουμε το i)

$x = h \notin C(g)$ παίρνουμε το ii)

Πίνακας Χαρακτήρων

$Cl(G) = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ κλάσεις συζυγίας της G

$Irr(\mathbb{C}G) = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_t\}$ ανάγωγοι χαρακτήρες

$C_1 = \{1\}$, $g_i \in C_i$, $i = 2, \dots, t$

	C_1	C_2	C_3	$\dots$	C_t
χ_1	$\chi_1(1)$	$\chi_1(g_2)$	$\chi_1(g_3)$	$\dots$	$\chi_1(g_t)$
χ_2	$\chi_2(1)$	$\chi_2(g_2)$	$\chi_2(g_3)$	$\dots$	$\chi_2(g_t)$
χ_3	$\chi_3(1)$	$\chi_3(g_2)$	$\chi_3(g_3)$	$\dots$	$\chi_3(g_t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
χ_t	$\chi_t(1)$	$\chi_t(g_2)$	$\chi_t(g_3)$		$\chi_t(g_t)$

$\chi_1(g) = 1 \quad \forall g \in G$ "τετριμμένη"

Έστω $n_i := \chi_i(1)$

Ξέρουμε ότι: * $\sum n_i^2 = |G|$

* $\sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \delta_{ij}|G|$

* $\sum_i \overline{\chi_i(g)}\chi_i(h) = \begin{cases} \dfrac{|G|}{\# C_j} & \text{αν } g,h \in C_j \\ 0 & \text{αν } g,h \text{ δεν είναι συζυγή} \end{cases}$

* Αν $\chi_i(1) = 1$, τότε $\chi_i(g)$ ρίζα της μονάδας

Θα δούμε αργότερα ότι: * $n_i \mid |G| \quad \forall i = 1, \dots, t$

<u>Παράδειγμα</u>

$G = S_3$

$C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$

$C_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

Άρα $|Irr(\mathbb{C}G)| = 3 = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$

$\chi_1(1) = 1$

$\chi_1(1)^2 + \chi_2(1)^2 + \chi_3(1)^2 = 6 \Rightarrow \chi_2(1) = 1, \chi_3(1) = 2$

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	a	b
χ_3	2	c	d

Έχουμε : $a^2 = 1 \Rightarrow a \in \{1, -1\}$, $b^3 = 1 \Rightarrow b \in \{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\}$

$\langle \chi_2, \chi_1 \rangle = 0 \Rightarrow 1 + 3a + 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{-1-3a}{2} \in \mathbb{Q}$

Άρα $b = 1$ και $a = (-1-2b)/3 = -1$ $\rightsquigarrow$ χ_2 sign representation

Θα μπορούσαμε να μη χρησιμοποιήσουμε τίποτα άλλο πέρα από το ότι τα a, b είναι ρίζες της μονάδας και τη σχέση $\langle \chi_2, \chi_2 \rangle = 1$

$$\left.\begin{aligned} \langle \chi_3, \chi_1 \rangle = 0 &\Rightarrow 2 + 3c + 2d = 0 \\ \langle \chi_3, \chi_2 \rangle = 0 &\Rightarrow 2 - 3c + 2d = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c &= 0 \\ d &= -1 \end{aligned}$$

Ας κατασκευάσουμε την αναπαράσταση της S_3

Έστω $V = \mathbb{C}^3$ με την standard αναπαράσταση της S_3

$\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$

Τότε $V^{S_3} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = y = z \} = \langle (1,1,1) \rangle$

Έστω $W = (V^{S_3})^{\perp} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x+y+z = 0 \}$

Έχουμε $W = \langle \overset{\varepsilon_1}{\overset{\shortparallel}{(1,-1,0)}}, \overset{\varepsilon_2}{\overset{\shortparallel}{(0,1,-1)}} \rangle$

Αφού $S_3 = \langle \overset{s_1}{\overset{\shortparallel}{(1\ 2)}}, \overset{s_2}{\overset{\shortparallel}{(2\ 3)}} \rangle$ αρκεί να ορίσουμε την $\rho(s_1)$ και $\rho(s_2)$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 \cdot \varepsilon_1 = -\varepsilon_1 \\ s_1 \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(s_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(s_1) = 0$$

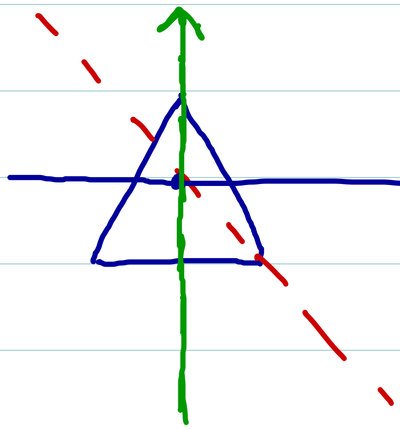
$$\left.\begin{array}{l} s_2 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ s_2 \cdot \varepsilon_2 = -\varepsilon_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(s_2) = 0$$

$$\rho(s_1^2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi(1) = 2$$

$$\rho(s_1 s_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi(s_1 s_2) = -1$$

S_3 = ομάδα συμμετρίας του ισόπλευρου τριγώνου



$e_1 = (1,0) \quad e_2 = (0,1) \quad W' = \mathbb{R}^2$

$$s_1 \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ \sin\pi & -\cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_2 \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{3} & \sin\frac{5\pi}{3} \\ \sin\frac{5\pi}{3} & -\cos\frac{5\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$\chi(s_1) = 0 \quad \chi(s_2) = 0$

$W \cong W'$;

- Μπορούμε να υπολογίσουμε όλους τους χαρακτήρες

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 3 \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

- Ξέρουμε ότι οι δυνατότητες για αναπαραστάσεις διάστασης 2 είναι:

$2\chi_1,\ 2\chi_2,\ \chi_1+\chi_2,\ \chi_3$

$2\chi_1(s_1) = 2$ $\qquad$ $2\chi_1(s_1 s_2) = 2$

$2\chi_2(s_1) = -2$ $\qquad$ $2\chi_2(s_1 s_2) = 2$

$\chi_1+\chi_2(s_1) = 0$ $\qquad$ $\chi_1+\chi_2(s_1 s_2) = 2$

$\chi_3(s_1) = 0$ $\qquad$ $\chi_3(s_1 s_2) = -1$

Δεν ξεχωρίζει. $\qquad$ Ξεχωρίζει

$$s_1 s_2 \underset{W}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 \underset{W'}{\longmapsto} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Splitting field is $\mathbb{Q}$