ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΒΙΒΛΙΑ:

- S. Lang, Algebra
- T. Y. Lam, A first course in non-commutative rings
- J.-P. Serre, Linear representations of finite groups

- Παρουσιάσεις την τελευταία βδομάδα των μαθημάτων
- 1-2 ασκήσεις / βδομάδα

Πρότυπα (Modules)

R δακτύλιος με μονάδα 1_R

<u>Ορισμός</u>: Ένα R-πρότυπο είναι μια αβελιανή ομάδα $(M,+)$ (προσεταιριστική, μεταθετική, $\exists\, 0_M$, $\exists$ αντίθετος) εφοδιασμένη με έναν εξωτερικό (βαθμωτό) πολλαπλασιασμό: $R\times M \longrightarrow M$, $(r,m)\longmapsto r\cdot m$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $r\cdot(m_1+m_2) = r\cdot m_1 + r\cdot m_2 \quad \forall r\in R, \forall m_1,m_2\in M$

(β) $(r_1+r_2)\cdot m = r_1\cdot m + r_2\cdot m \quad \forall r_1,r_2\in R, \forall m\in M$

(γ) $(r_1\cdot r_2)\cdot m = r_1\,(r_2\cdot m) \quad \forall r_1,r_2\in R, \forall m\in M$

(δ) $1_R\cdot m = m \quad \forall m\in M$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο παραπάνω ορισμός είναι του <u>αριστερού</u> R-προτύπου. Παρόμοια μπορούμε να δώσουμε ορισμό <u>δεξιού</u> R-προτύπου, με εξωτερικό πολ/σμό $M\times R\longrightarrow M$, $(m,r)\longmapsto m\cdot r$

<u>Προσοχή!</u> (γ) $m\cdot(r_1\cdot r_2) = (m\cdot r_1)\cdot r_2 \quad \forall r_1,r_2\in R, \forall m\in M$ σε αυτήν την περίπτωση

Αν ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός, δεν έχει μεγάλη σημασία το να προσδιορίσουμε αν το πρότυπο είναι αριστερό ή δεξιό.

Παραδείγματα (Ασκήσεις)

- $R = k$ σώμα $\Rightarrow$ M k-διανυσματικός χώρος
- $R = \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ M αβελιανή ομάδα

Έστω $m \in M$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Τότε:

$$\lambda \cdot m = \begin{cases} \underbrace{m + m + \ldots + m}_{\lambda \text{ φορές}} & \lambda > 0 \\ 0_M & \lambda = 0 \\ (-\lambda)(-m) & \lambda < 0 \end{cases}$$

- $\{0_M\}$ $\quad r \cdot 0_M = 0_M \quad \forall r \in R$ $\Big\}$ αριστερά και δεξιά
- R R-πρότυπο
- $Mat_{m\times n}(R)$ R-πρότυπο $\quad r \cdot (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = (r a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$

- k σώμα $\quad k^{n\times 1}$ είναι αριστερό $Mat_n(k)$-πρότυπο
  $k^{1\times n}$ είναι δεξιό $Mat_n(k)$-πρότυπο
- M, N R-πρότυπα $\Rightarrow$ $M \times N$ R-πρότυπα
- R^n R-πρότυπο
- M R-πρότυπο, $f: S \to R$ ομομορφισμός δακτυλίων

  Τότε M S-πρότυπο με $s \cdot m = f(s) \cdot m$

<u>Λήμμα</u>: (α) $0_R \cdot m = 0_M \quad \forall\, m \in M$

(β) $r \cdot 0_M = 0_M \quad \forall\, r \in R$

(γ) $(-r)\cdot m = -(r\cdot m) = r\cdot(-m) \quad \forall\, r \in R, \forall\, m \in M$

<u>Αποδ</u> (α) $0_R + 0_R = 0_R \Rightarrow (0_R + 0_R)\cdot m = 0_R \cdot m$

$\Rightarrow 0_R \cdot m + 0_R \cdot m = 0_R \cdot m \Rightarrow 0_R \cdot m = 0_M$

(β) $0_M + 0_M = 0_M \Rightarrow r\cdot(0_M + 0_M) = r \cdot 0_M$

$\Rightarrow r\cdot 0_M + r \cdot 0_M = r\cdot 0_M \Rightarrow r \cdot 0_M = 0_M$

(γ) $r\cdot m + (-r)\cdot m = (r + (-r))\cdot m = 0_R \cdot m = 0_M$

$\Rightarrow -(rm) = (-r)\cdot m$

$r\cdot m + r(-m) = r\cdot(m + (-m)) = r \cdot 0_M = 0_M$

$\Rightarrow -(rm) = r\cdot(-m)$

<u>Ορισμός</u> Έστω M ένα R-πρότυπο. Ένα υποσύνολο N του M λέγεται <u>R-υποπρότυπο του M</u> ανν:

(i) $(N, +)$ υποομάδα της $(M, +)$

(ii) Για κάθε $r \in R$ και για κάθε $n \in N$, $r\cdot n \in N$

Δηλ. το N είναι R-πρότυπο με τον εξωτερικό πολ/σμό του M

Θα γράφουμε $N \leq M$

<u>Λήμμα</u>: Έστω N ένα μη κενό υποσύνολο του M. Τότε $N \leq M \Leftrightarrow \forall\, a, b \in N, \forall\, r \in R$ έχουμε $a - b \in N$ και $r \cdot a \in N$

Παραδείγματα:

- $\{0_M\} \leq M$ για κάθε R-πρότυπο M
- $R = k$ σωμα : Υποπρότυπα ≡ Υποχώροι
- $R = \mathbb{Z}$: Υποπροτυπα ≡ Υποομάδες
- Αριστερά υποπροτυπα του R ≡ αριστερά ιδεώδη του R
- Δεξιά υποπροτυπα του R ≡ δεξιά ιδεώδη του R

Λήμμα: Αν $N_1, N_2 \leq M$, τότε $N_1 \cap N_2 \leq M$

Αποδ. 1) $0_M \in N_1 \cap N_2$

2) $a, b \in N_1 \cap N_2 \Rightarrow a, b \in N_i \ \forall i = 1,2$

$$\overset{N_i \leq M}{\Longrightarrow} a - b \in N_i \ \forall i = 1,2$$

$$\Rightarrow a - b \in N_1 \cap N_2$$

3) $r \in R, a \in N_1 \cap N_2 \Rightarrow a \in N_i, \ \forall i = 1,2$

$$\Rightarrow r \cdot a \in N_i, \ \forall i = 1,2$$

$$\Rightarrow r \cdot a \in N_1 \cap N_2$$

Πηλίκο προτύπων

Αν $N \leq M$, τότε $(N,+) \trianglelefteq (M,+)$

κανονική υποομάδα

Άρα μπορούμε να ορίσουμε την ομάδα πηλίκο

$M/N = \{ m+N \mid m \in M \}$

όπου $m+N = \{ m+n \mid n \in N \}$

Έχουμε $m_1+N = m_2+N \iff m_1 - m_2 \in N$

Θ.Ομάδων $\Rightarrow$ M/N είναι αβελιανή ομάδα με πράξη

την πρόσθεση : $(m_1+N)+(m_2+N) = (m_1+m_2)+N$

Το σύνολο M/N είναι R-πρότυπο με :

- πρόσθεση την πρόσθεση της ομάδας πηλίκο
- εξωτερικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται ως εξής :

$$R \times M/N \longrightarrow M/N$$
$$(r, m+N) \longmapsto r\cdot m + N$$

Είναι καλά ορισμένος γιατί αν $m_1+N = m_2+N$, τότε $m_1 - m_2 \in N$. Αφού $N \leq M$, έχουμε $r\cdot(m_1-m_2) \in N$ και άρα $r\cdot m_1 - r\cdot m_2 \in N$. Επομένως $r\cdot m_1 + N = r\cdot m_2 + N$.

Παρατήρηση

Αν I αριστερό ιδεώδες του R, τότε R/I αριστερό R-πρότυπο

R/I δεν είναι δακτύλιος (αναγκαστικά)

I (αμφίπλευρο) ιδεώδες $\Rightarrow$ R/I δακτύλιος

Ορισμος: Έστω R-πρότυπα M, M'. Μια απεικόνιση $f: M \to M'$ λέγεται <u>ομομορφισμος R-προτύπων</u> (ή « R-γραμμική ») ανν

(i) $f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2) \quad \forall\ m_1, m_2 \in M$

(ii) $f(r\cdot m) = r\cdot f(m) \quad \forall\ r \in R, \forall\ m \in M$

πολ/σμος στο M πολ/σμος στο M'

Θα συμβολίζουμε το συνολο των ομομορφισμών R-προτύπων από το M στο M' με $Hom_R(M, M')$. Αν $M = M'$ θα γράφουμε $End_R(M)$

Παραδείγματα:

- $f: M \to M$, $m \mapsto m$ ταυτοτική (συμβ. id_M)
- Αν $N \leq M$, $f: N \to M$, $n \mapsto n$ (συμβ. $\iota_{N\to M}$)
- $f: M \to M$, $m \mapsto 0_M$ μηδενική
- $R = k$ σώμα, ομομορφισμοι $\equiv$ γραμ. απεικονίσεις
- $R = \mathbb{Z}$, » $\equiv$ ομομορφισμοί (αβελιανων) ομαδων

Ιδιότητες

- $f \in Hom_R(M, M')$

$f(0_M) = f(0_R \cdot 0_M) = 0_R \cdot f(0_M) = 0_{M'}$

- Η σύνθεση ομομορφισμών είναι ομομορφισμός
- Αν f ομομορφισμός και $\exists\, f^{-1}$, τότε f^{-1} είναι ομομορφισμός
- Αν $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ και $a \in R$, τότε ορίζουμε:

(i) $f+g \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$ με $(f+g)(m) = f(m)+g(m)$

(ii) Αν R μεταθετικός, τότε

$a \cdot f \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$ με $(a\cdot f)(m) = a \cdot f(m)$ $(= f(am))$

αφού $(a\cdot f)(rm) = a\cdot f(rm) = a\cdot(rf(m)) = (ar)f(m)$

$= (ra)f(m) = r\cdot(af(m)) = r\cdot(af)(m)$ $\forall r \in R, \forall m \in M$

Μπορούμε να δείξουμε ότι για αυτές τις πράξεις το σύνολο $\mathrm{Hom}_R(M,M')$ είναι R-πρότυπο, αν R μεταθετικός

<u>Ορισμοί</u>:

(i) Έστω $f \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$

- f επί $\Rightarrow$ f επιμορφισμός
- f 1-1 $\Rightarrow$ f μονομορφισμος
- f 1-1 και επί $\Rightarrow$ f ισομορφισμός

(ii) Λεμε ότι δυο R-πρότυπα M, M' είναι "ισόμορφα" και συμβολίζουμε ως $M \cong M'$ αν υπάρχει $f \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$ ισομορφισμος.

(iii) Έστω $f \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$

$\mathrm{Im} f = \{f(m) \mid m \in M\} = f(M)$ <u>εικόνα της f</u>

$\ker f = \{m \in M \mid f(m) = 0_{M'}\}$ <u>πυρήνας της f</u>

Λήμμα (άσκηση) 1:

Έστω $f \in Hom_R(M, M')$, $N \leq M$, $N' \leq M'$.

Τότε (i) $f(N) \leq M'$.

(ii) $f^{-1}(N') \leq M$

$\quad \| \{m \in M \mid f(m) \in N'\}$

Πόρισμα:

(i) $Imf \leq M'$ (αφού $Imf = f(M)$)

(ii) $Kerf \leq M$ (αφού $Kerf = f^{-1}(\{0_{M'}\})$)

Λήμμα (άσκηση) 2:

(i) f επί $\Longleftrightarrow$ $Imf = M'$

(ii) f 1-1 $\Longleftrightarrow$ $Kerf = \{0_M\}$