

Λήμμα (άσκηση) 1:

Έστω $f \in \text{Hom}_R(M, M')$, $N \leq M$, $N' \leq M'$.

Τότε (i) $f(N) \leq M'$.

(ii) $f^{-1}(N') \leq M$

$$= \{m \in M \mid f(m) \in N'\}$$

Πόρισμα:

(i) $\text{Im} f \leq M'$ (αφαι $\text{Im} f = f(M)$)

(ii) $\text{Ker} f \leq M$ (αφαι $\text{Ker} f = f^{-1}(\{0_{M'}\})$)

Λήμμα (άσκηση) 2:

(i) f επί $\Leftrightarrow \text{Im} f = M'$

(ii) f 1-1 $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0_M\}$

Ορισμός: Έστω $N \leq M$. Η απεικόνιση $\pi: M \rightarrow M/N$
με $\pi(m) = m + N$ είναι επιμορφισμός R -προτύπων
και ονομάζεται "φυσικός επιμορφισμός".

Παρατηρήσεις:

- Ισχύει $\text{Ker} \pi = \{m \in M \mid m + N = N\} = N$

- Υπάρχει αντιστοιχία $\left\{ \begin{array}{l} \text{Υποπροτύπα του } M \\ \text{που περιέχουν το } N \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Υποπροτύπα} \\ \text{του } M/N \end{array} \right\}$

Αποδ. Έστω $K \leq M/N$. Τότε $\pi^{-1}(K) \leq M$

Αφού K υποπροζυγίο, έχουμε $0_{M/N} \in K$

$$\text{Αρα } \pi^{-1}(\{0_{M/N}\}) \subseteq \pi^{-1}(K)$$

$\parallel$
 $\text{Ker } \pi$
 $\parallel$
 N

Επίσης, αφού π είναι επί, $\pi(\pi^{-1}(K)) = K$

Οπότε έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Υποπροζυγία του} \\ M/N \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Υποπροζυγία του } M \\ \text{που περιέχουν το } N \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} K & \longmapsto & \pi^{-1}(K) \\ \pi(L) & \longleftarrow & L \\ \parallel & & \\ L/N & & \end{array}$$

1.9. Θ. Ισομορφισμών R-προζυγίων

Αν $f \in \text{Hom}_R(M, M')$, τότε η απεικόνιση $\bar{f}: M/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$ με $\bar{f}(m + \text{Ker } f) = f(m)$ είναι ισομορφισμός R-προζυγίων

Αποδ. Αν $m + \text{Ker } f = m' + \text{Ker } f$, τότε $m - m' \in \text{Ker } f$.

$$\text{Αρα } f(m - m') = 0_{M'} \Rightarrow f(m) - f(m') = 0_{M'} \Rightarrow f(m) = f(m')$$

Επομένως αν $m + \text{Ker } f = m' + \text{Ker } f$, τότε

$$\bar{f}(m + \text{Ker } f) = \bar{f}(m' + \text{Ker } f).$$

Αρα η $\bar{f}$ είναι καλά ορισμένη.

Αν $\bar{f}(m + \ker f) = \bar{f}(m' + \ker f)$, τότε $f(m) = f(m')$

$$\Rightarrow f(m) - f(m') = 0_M \Rightarrow f(m - m') = 0_M \Rightarrow m - m' \in \ker f$$

$$\Rightarrow m + \ker f = m' + \ker f$$

Αρα η $\bar{f}$ είναι 1-1

Επίσης η $\bar{f}$ είναι επί εξ ορισμού

Τέλος, θα δείξουμε ότι η $\bar{f}$ είναι ομομορφισμός R -προτύπων.

$$\bar{f}(m + \ker f + m' + \ker f) = \bar{f}(m + m' + \ker f) = f(m + m')$$

$$= f(m) + f(m') = \bar{f}(m + \ker f) + \bar{f}(m' + \ker f)$$

Αν $a \in R$, τότε

$$\bar{f}(a \cdot (m + \ker f)) = \bar{f}(am + \ker f) = f(am) = a \cdot f(m) = a \cdot \bar{f}(m + \ker f)$$

Παράδειγμα:

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ομομορφισμός $\mathbb{Z}$ -προτύπων

$$x \mapsto (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})$$

Αν $\mu\kappa\delta(m, n) = 1$, τότε $\bar{f}: \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$x + mn\mathbb{Z} \mapsto f(x)$$

είναι ομομορφισμός $\mathbb{Z}$ -προτύπων

(f επί γιατί $\forall (x + m\mathbb{Z}, y + n\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $x - y = am + bn$

$$\text{οπότε } x + m\mathbb{Z} = x - am + m\mathbb{Z} = y + bn + n\mathbb{Z} = y + n\mathbb{Z}$$

$$\text{και άρα } f(x - am) = f(y + bn) = (x + m\mathbb{Z}, y + n\mathbb{Z}))$$

Ορισμός : Έστω R -πρότυπο M και $X \subseteq M, X \neq \emptyset$.

Το υποπρότυπο του M που παράγεται από το X είναι η τμήση όλων των υποπρωτύπων του M που περιέχουν το X
Το συμβολίζουμε με (X)

Πρόταση : $(X) = \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in R, x_i \in X \right\}}_A$

Απόδ Έστω A το δεξι μέλος. Θα δείξουμε ότι $A \leq M$.

- $X \subseteq A \Rightarrow A \neq \emptyset$
- Έστω $\sum_{i=1}^n r_i x_i, \sum_{i=1}^n r'_i x_i \in A$. Τότε $\sum_{i=1}^n r_i x_i - \sum_{i=1}^n r'_i x_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{(r_i - r'_i)}_A x_i \in A$

- Έστω $r \in R$. Τότε $r \cdot \left(\sum_{i=1}^n r_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n (r r_i) x_i \in A$

Άρα $A \leq M$ και $X \subseteq A$

Οπότε $(X) \subseteq A$.

Έστω $N \leq M$, τέτοιο ώστε $X \subseteq N$

Έχουμε ότι $\sum_{i=1}^n r_i x_i \in N$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, r_i \in R, x_i \in X$
Οπότε $A \subseteq N$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε υποπρότυπο N που περιέχει το X , καταλήγαμε ότι $A \subseteq (X)$.

Όρισμοί:

- Αν $X = \{x_1, \dots, x_s\}$, τότε γράφουμε $(x_1, \dots, x_s)$ αντί για (X)
- Αν $M = (X)$ θα λέμε ότι το M παράγεται από το X και ότι το X είναι ένα σύνολο γεννητορών του M
- Αν $M = (X)$ και το X είναι πεπερασμένο, θα λέμε ότι το M είναι πεπερασμένα παραχόμενο πρότυπο
- Αν $X = \{m\}$ και $M = (m) = \{r \cdot m \mid r \in R\}$, τότε θα λέμε ότι το M είναι κυκλικό R -πρότυπο.

Παραδείγματα:

- $R = K$, πεπερασμένα παραχ. πρότυπα $\equiv$ διαν. χώροι πεπερασμένης διάστασης
κυκλικά πρότυπα $\equiv$ διαν. χώροι διάστασης 1
- $R = \mathbb{Z}$, πεπερασμένα παραχ. πρότυπα $\equiv$ πεπερασμένα παραχ. αβελιανές ομάδες
κυκλικά πρότυπα $\equiv$ κυκλικές αβελιανές ομάδες
- R είναι κυκλικό R -πρότυπο με $R = (1_R)$
Τα R -υποπρότυπα του R είναι τα ιδεώδη
Τα κυκλικά R -υποπρότυπα του R είναι τα κύρια ιδεώδη
- $\mathbb{Z}[X] = (1)$ ως $\mathbb{Z}[X]$ -πρότυπο
Όμως το $\mathbb{Z}[X]$ δεν είναι πεπερασμένα παραχόμενο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο
γιατί αν υποθέσουμε ότι $\mathbb{Z}[X] = (\neq_1, \neq_2, \dots, \neq_s)$ και
 $n := \max_{1 \leq i \leq s} \deg \neq_i$. Τότε $X^{n+1} \notin (\neq_1, \neq_2, \dots, \neq_s)$

Πρόταση: Αν M κυκλικό R -πρότυπο, τότε $M \cong R/I$
για κάποιο αριστερό ιδεώδες του R

Αποδ. Έστω $M = (m)$ για κάποιο $m \in M$

Ορίζουμε $f: R \longrightarrow M$ με $f(r) = r \cdot m$

Η f είναι ομομορφισμός R -προτύπων:

- $f(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m = f(r_1) + f(r_2)$
- Για $a \in R$, $f(a \cdot r) = (a \cdot r) \cdot m = a \cdot (r \cdot m) = a \cdot f(r)$

Η f είναι επί αφού $M = \{r \cdot m \mid r \in R\}$

$\text{Ker} f \leq R$ και άρα $\text{Ker} f$ αριστερό ιδεώδες του R

1ο Θ.Ι.Π. $\Rightarrow R/\text{Ker} f \cong M$

Ορισμός: Έστω M R -πρότυπο και $m \in M$

$$\text{Ann}_R(m) = \{r \in R \mid r \cdot m = 0\} \leq R$$

$$\text{Ann}_R(M) = \bigcap_{m \in M} \text{Ann}_R(m) \quad \underline{\text{μηδενιστής του } M}$$

Προσοχή: Αν $M = (m)$, δεν ισχύει $\text{Ann}_R(M) = \text{Ann}_R(m)$

αν ο δαυτυλίας R δεν είναι μεταθετικός

$$\text{π.χ. } R = \text{Mat}_2(\mathbb{R}), \quad m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ann}_R(m) \neq \{0_R\} = \text{Ann}_R(M) \quad (\text{Άσκηση})$$

Ορισμός: Το M λέγεται πιστό αν $\text{Ann}_R(M) = \{0_R\}$.

Πρόταση: Ο μηδενιστής $\text{Ann}_R(M)$ είναι ιδεώδες του R

Αποδ 1) $0_R \in \text{Ann}_R(M)$

Επίσης για κάθε $m \in M$ έχουμε:

2) Αν $a, b \in \text{Ann}_R(M)$, τότε $(a-b) \cdot m = a \cdot m - b \cdot m = 0_M - 0_M = 0_M$

3) Αν $r \in R, a \in \text{Ann}_R(M)$, τότε $(r \cdot a) \cdot m = r \cdot (a \cdot m) = r \cdot 0_M = 0_M$

4) Αν $r \in R, a \in \text{Ann}_R(M)$, τότε $(a \cdot r) \cdot m = a \cdot \underbrace{(r \cdot m)}_{\in M} = 0_M$

Παραδείγματα:

① $R = k$ σώμα, $\text{Ann}_R(M) = \{0\}$ για $M \neq \{0\}$

$\text{Ann}_k(M) \in \{\{0\}, k\}$.

Όπως έχουμε $1 \notin \text{Ann}_k(M)$ αν $M \neq \{0\}$

② $\text{Ann}_R(\{0_M\}) = R$

③ $R = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow \text{Ann}_{\mathbb{Z}}(M) = (n)$

④ $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = (\bar{1}) \Rightarrow \text{Ann}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\bar{0}\}$

Άθροισμα Προζυπτών

Έστω $M_1, \dots, M_t \leq M$. Το άθροισμα των υποπροζυπτών $M_1, \dots, M_t$ είναι το υποπροζυπτό του M που παράγεται από την ένωση τους και συμβολίζεται με $M_1 + \dots + M_t$ ή $\sum_{i=1}^t M_i$

Έχουμε $M_1 + \dots + M_t = \{m_1 + m_2 + \dots + m_t \mid m_i \in M_i\} \supseteq M_i$
 $\forall i$

Άσκηση!: $K, L, N \leq M$ με $K \subseteq L$. Τότε

$$K + (L \cap N) = L \cap (K + N)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \text{Λίστη: } K \subseteq L \\ K \subseteq K + N \end{matrix}} \Rightarrow K \subseteq L \cap (K + N) \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} L \cap N \subseteq N \subseteq K + N \\ L \cap N \subseteq L \end{matrix}} \Rightarrow L \cap N \subseteq L \cap (K + N) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow K + (L \cap N) \subseteq L \cap (K + N)$$

Έστω $x \in L \cap (K + N)$. Τότε $x = \overset{L}{\underbrace{\ell}} = \overset{K}{\underbrace{k}} + \overset{N}{\underbrace{n}} \Rightarrow n = \overset{L}{\underbrace{\ell}} - \overset{L}{\underbrace{k}} \in L$
Αρα $n \in L \cap N$. Οπότε $x \in K + (L \cap N)$
Επομένως $L \cap (K + N) \subseteq K + (L \cap N)$

2ο Θ. Ισομ. R-προτύπων

$L, N \leq M$. Τότε $L + N / N \cong L / L \cap N$

Αποδ. $\varphi: L \rightarrow L + N / N$

$$\ell \mapsto \ell + N$$

$$\ker \varphi = L \cap N$$

Παρατήρηση : Μ πεπερασμένο παραχόμενο, δηλ. $M = (x_1, \dots, x_n)$
τότε $M = (x_1) + \dots + (x_n)$

Ευθύ άθροισμα προτύπων (εξωτερικό)

Έστω R -πρότυπα $M_1, M_2, \dots, M_t$. Το ευθύ άθροισμα των $M_1, M_2, \dots, M_t$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο $M_1 \times \dots \times M_t$ με δομή R -πρότυπου που δίνεται ως εξής:

- πρόσθεση :

$$(m_1, m_2, \dots, m_t) + (m'_1, m'_2, \dots, m'_t) = (\underbrace{m_1 + m'_1}_{M_1}, \underbrace{m_2 + m'_2}_{M_2}, \dots, \underbrace{m_t + m'_t}_{M_t})$$

- εξωτερικό πολλαπλασιασμο :

$$r \cdot (m_1, m_2, \dots, m_t) = (\underbrace{r \cdot m_1}_{M_1}, \underbrace{r \cdot m_2}_{M_2}, \dots, \underbrace{r \cdot m_t}_{M_t})$$

Όρισμός : Έστω R -πρότυπο M και $M_1, M_2, \dots, M_t \leq M$

Θα λέμε ότι το M είναι το (εσωτερικό) ευθύ άθροισμα των $M_1, \dots, M_t$ αν κάθε $m \in M$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $m_1 + \dots + m_t$ με $m_i \in M_i$. Έχουμε $M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_t$
Γράφουμε $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t$. $m \mapsto (m_1, \dots, m_t)$

Πρόταση : $M_1, \dots, M_t \leq M$

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t \iff \begin{cases} \text{(i) } M = M_1 + \dots + M_t \\ \text{(ii) } M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0_M\} \quad \forall i \in \{1, \dots, t\} \end{cases}$$

Αποδ. Άσκηση

Ορισμός Θα πούμε ότι το $N \leq M$ είναι ευθύ προσδετέος του M αν υπάρχει $N' \leq M$ ώστε $M = N \oplus N'$

Πρόταση 1:

Αν $M = M_1 \oplus M_2$, τότε $M/M_2 \cong M_1$. Γενικότερα, αν

$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t$, τότε $M_i \cong M / \bigoplus_{j \neq i} M_j$

Αποδ. $\phi : M \longrightarrow M_1$ προβολή στο M_1

$$m_1 \oplus m_2 = m \longmapsto m_1$$

Δείχνουμε ευκολα ότι η ϕ είναι ομομορφισμός R -προτύπων:

$$\begin{aligned} \bullet \phi(m+m') &= \phi(m_1+m_2+m'_1+m'_2) = \phi(\underbrace{m_1+m'_1}_{\in M_1} + m_2+m'_2) \\ &= m_1+m'_1 = \phi(m) + \phi(m') \end{aligned}$$

$$\bullet \phi(r \cdot m) = \phi(r \cdot (m_1+m_2)) = \phi(\underbrace{rm_1}_{\in M_1} + rm_2) = rm_1 = r \cdot \phi(m)$$

Επίσης η ϕ είναι επί αφού $m_1 = \phi(m_1) \forall m_1 \in M_1$

$$\begin{aligned} \text{Ker } \phi &= \{ m \mid \phi(m) = 0 \} \\ &= \{ m_1+m_2 \mid m_1 = 0 \} = M_2 \end{aligned}$$

$$1 \cong 0. \text{ισομ} \Rightarrow M/M_2 \cong M_1$$

Πρόταση 2: Έστω $M_1, \dots, M_t \leq M$

① $M = M_1 + \dots + M_t, M_i$ πετ. παραχ. $\Rightarrow M$ πετ. παραχ.

② M πετ. παραχ $\Rightarrow M/M_i$ πετ. παραχ. $\forall i$

③ $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t, M$ πετ. παραχ $\Rightarrow M_i$ πετ. παραχ.

Αποδ ① $M_i = (X_i)$ X_i πεπερασμένο

$$M = (M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_t) = (\underbrace{X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t}_{\text{πεπερασμένο}})$$

② $M = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow M/M_i = (x_1 + M_i, x_2 + M_i, \dots, x_n + M_i)$

③ Πρόταση 1 $\Rightarrow M_i \cong M / \bigoplus_{j \neq i} M_j$

② $\Rightarrow M_i$ πετ. παραχ.

Παράδειγμα - Ορισμός:

$R = (1)$ R -πρότυπο

$$R^n := \bigoplus_{i=1}^n \underset{M}{M_i} = \{ (r_1, r_2, \dots, r_n) \mid r_i \in R \} \text{ } R\text{-πρότυπο}$$

πετ. παραχόμενο από τα στοιχεία $e_i = (0, 0, \dots, 0, \overset{\text{θέση } i}{1}, 0, \dots, 0)$

Παρατήρηση:

Τυχαια υποπρότυπα πετ. παραχ. πρότυπου δεν είναι αναγκαστικά πετ. παραχόμενο, π.χ. $R = k[X_1, X_2, \dots]$, $R = (1)$ ως R -πρότυπο $I = (X_1, X_2, \dots)$ δεν είναι πεπερασμένα παραχόμενο γιατί αν $I = (\underset{\uparrow \text{πετ.}}{S})$ και $X_j \notin S$, τότε $X_j \notin I$