

Ορισμός :

- (i) Ένας δαυτύλιος R που είναι αριστερό R -προτύπο της Noether λέγεται αριστερός δαυτύλιος της Noether (Αντιστοιχα ορίζουμε το δεξιό)
- (ii) Ένας δαυτύλιος R που είναι αριστερό R -πρότυπο του Artin λέγεται αριστερός δαυτύλιος του Artin (Αντιστοιχα ορίζουμε το αριστερό)
- (iii) Ένας δαυτύλιος R λέγεται δαυτύλιος της Noether (αντ. του Artin) αν είναι αριστερός και δεξιός δαυτύλιος της Noether (αντ. του Artin).

Παρατήρηση:

Ένας δαυτύλιος είναι αριστερός (αντ. δεξιός) της Noether ανν όλα τα αριστερά (αντ. δεξιά) ιδεώδη είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

Παραδείγματα:

- (1) Τα σώματα και οι δαυτύλιοι διαιρέσης (μη μεταδετιμοι αλλα κάθε στοιχείο $\neq 0$ είναι αντιστρεψιμο) είναι και του Artin και της Noether (αφου έχουν μόνο 2 ιδεώδη)
- (2) Οι περιοχές κυρίων ιδεωδών είναι δαυτύλιοι της Noether
γιατι υαδε ιδεωδες είναι πεπερασμένα παραγόμενα (π.χ $\mathbb{Z}, k[X]$ ^{κ σώμα} $\mathbb{Z}[i]$)

(3) R περιοχ. R Artin $\Leftrightarrow R$ σώμα

Έστω $a \in R, a \neq 0$, a μη αντιστρέψιμο

$$(a) \supseteq (a^2) \supseteq (a^3) \supseteq \dots$$

Αν η παραπάνω ακολουθία σταθεροποιείται, τότε

υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέω. $(a^n) = (a^{n+1})$. Άρα υπάρχει

$r \in R$ τέω. $a^n = a^{n+1} \cdot r \Rightarrow a \cdot r = 1 \Rightarrow a$ αντιστρέψιμο

(4) Οποιοσδήποτε πεπερασμένος δαυτίριος είναι και του Artin και της Noether π.χ. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Θεώρημα: $N \leq M$, M R -πρότυπο

M R -πρότυπο της Noether (αντ. του Artin)

$\Leftrightarrow N$ και M/N είναι της Noether (αντ. του Artin)

Αποδ. " $\Rightarrow$ " M πρότυπο της Noether. Κάθε αυξουσα ακολουθία

υποπρότυπων του M/N είναι της μορφής:

$$L_1/N \subseteq L_2/N \subseteq L_3/N \subseteq \dots$$

$$\text{όπου } L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \dots$$

είναι μια αυξουσα ακολουθία υποπρότυπων του M που περιέχουν

το N . Η δεύτερη ακολουθία σταθεροποιείται, και άρα σταθε-

ροποιείται και η πρώτη. Επομένως το M/N είναι της Noether.

Επίσης οποιαδήποτε ακολουθία υποπρότυπων του N είναι

και ακολουθία υποπρότυπων του M . Άρα το N ικανοποιεί την ΣΑΑ.

Όποτε το N είναι της Noether

Αντιστοίχα αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα για Artin

“ $\Leftarrow$ ” Υποθέτουμε ότι το N και το M/N είναι της Noether

Έστω $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \dots$

μια αυξουσα ακολουθια υποπροτύπων του M

Θεωρούμε την ακολουθια

$$L_1 \cap N \subseteq L_2 \cap N \subseteq L_3 \cap N \subseteq \dots$$

υποπροτύπων του N . Αφου το N είναι της Noether,

υπαρχει $m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $L_k \cap N = L_m \cap N \quad \forall k \geq m$

Θεωρούμε την ακολουθια

$$L_1 + N \subseteq L_2 + N \subseteq L_3 + N \subseteq \dots$$

υποπροτύπων του M που περιέχουν το N

Όποτε υπάρχει αναστοίχη ακολουθια υποπροτύπων του M/N :

$$(L_1 + N)/N \subseteq (L_2 + N)/N \subseteq (L_3 + N)/N \subseteq \dots$$

Αφου το M/N είναι της Noether, υπαρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$(L_k + N)/N = (L_n + N)/N \quad \forall k \geq n$$

$$\text{Αρα } \underline{L_k + N = L_n + N} \quad \forall k \geq n$$

Έστω $t = \max\{m, n\}$. Για κάθε $k \geq t$

$$\begin{aligned} L_k &= L_k \cap (L_k + N) = L_k \cap (L_t + N) && \text{Ασυνση! Μαθ. 2} \\ &= L_t + (L_k \cap N) && = \\ &= L_t + (L_t \cap N) = L_t \end{aligned}$$

Αρα το M ικανοποιει την ΣΑΑ, οποτε είναι της Noether

Αντιστοίχα αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα για Artin.

Πόρισμα: Έστω I ένα (αμφίπλευρο) ιδεώδες του R

Τότε ο R είναι αριστερός (αντ. δεξιός) δαυτύλιος της Noether (αντ. του Artin) $\Rightarrow R/I$ είναι αριστερός (αντ. δεξιός) δαυτύλιος της Noether (αντ. του Artin)

Αποδ. Από το προηγούμενο θεώρημα,

έχουμε ότι R/I είναι αριστερός (αντ. δεξιός) R -πρότυπο της Noether (αντ. του Artin)

$$\text{Όπως : } (a+I) + (b+I) = a+b+I \quad \forall a, b \in R$$

$$\text{και } r \cdot (a+I) = r \cdot a + I = (r+I)(a+I) \quad \forall r, a \in R$$

οπότε η δομή του R/I ως R -πρότυπο είναι ίδια με τη δομή του R/I ως R/I -πρότυπο.

Διαφορετικά, μπορούμε να επαναλάβουμε την προηγούμενη απόδειξη, δηλαδή: Έστω R Noether. Κάθε αυξούσα ακολουθία αριστερών ιδεωδών του R/I είναι της μορφής:

$$J_1/I \subseteq J_2/I \subseteq J_3/I \subseteq \dots$$

$$\text{όπου } J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$$

είναι μια αυξούσα ακολουθία αρ. ιδεωδών του R που περιέχουν το I . Η δεύτερη ακολουθία σταθεροποιείται, και άρα σταθεροποιείται και η πρώτη. Επομένως το R/I είναι της Noether.

Αντίστοιχα αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα για Artin

Πρόταση: $\star$ Έστω $N_1, N_2, \dots, N_t \leq M$ είναι R-υποπροσύντα της Noether (αντ. του Artin). Τότε το $N_1 + \dots + N_t$ είναι της Noether (αντ. του Artin)

Αποδ. Θα το δείξουμε για $t=2$. Μια απλή επαγωγή μας δίνει τη γενικότερη περίπτωση. Έστω $N_1, N_2 \leq M$ της Noether. Από το Θεώρημα, το προσύντα $N_1/N_1 \cap N_2$ είναι προσύντα της Noether. Από το 2ο Θ. Ισομ. Προσύντων, $N_1/N_1 \cap N_2 \cong N_1 + N_2/N_2$. Άρα $(N_1 + N_2)/N_2$ είναι της Noether $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow N_1 + N_2 \text{ είναι} \\ N_2 \text{ είναι της Noether} \end{array} \right\} \Rightarrow$ της Noether

Αντίστοιχα αποδεικνύουμε για Artin

Πρόταση: Αν M_1, M_2 είναι R-προσύντα της Noether (αντ. του Artin) τότε $M_1 \oplus M_2$ είναι της Noether (αντ. του Artin)

Αποδ. Το $M_1 \oplus \underbrace{\{0\}}_{M_2}$ είναι υποπροσύντα του $M_1 \oplus M_2$

Έχουμε $M_1 \oplus M_2 / M_1 \oplus \{0\} \cong \{0\} \oplus M_2 \cong M_2$

(άρκει να πάρουμε $f: M_1 \oplus M_2 \rightarrow \{0\} \oplus M_2$ και να εφαρμόσουμε το 1ο Θ. Ισομ.) $(x, y) \mapsto (0, y)$

Άρα από το Θεώρημα, $M_1 \oplus M_2$ είναι της Noether.

Αντίστοιχα αποδεικνύουμε για Artin.

Πόρισμα: R αριστέρος δαυτύγιος της Noether (αντ. Artin)
 $\Rightarrow R^n$ R -πρότυπο της Noether (αντ. Artin)

Πόρισμα: Έστω R αριστέρος (αντ. δεξίος) δαυτύγιος της Noether (αντ. του Artin) και M ένα πεπερασμένα παραχόμενο αριστέρο (αντ. δεξίό) R -πρότυπο. Τότε το M είναι της Noether (αντ. του Artin)

Αποδ. 1^{ος} τρόπος $M = (x_1) + (x_2) + \dots + (x_n)$
για $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$. Έχουμε δείξει ότι $(x_i) \cong R/\text{Ann}_R(x_i)$
Θ. $\Rightarrow R/\text{Ann}_R(x_i)$ είναι της Noether (αντ. του Artin)
Πρόταση $\otimes \Rightarrow (x_1) + \dots + (x_n)$ είναι της Noether (αντ. του Artin)

2^{ος} τρόπος
 M πεπ. παραχ $\Leftrightarrow \exists \neq: R^n \rightarrow M$ επιμορφισμός R -πρότυπων για υπόλοιπο n
Αφού R^n είναι της Noether (αντ. του Artin) $\xRightarrow{\Theta} R^n/\text{Ker} \neq$ είναι της Noether (αντ. του Artin). Από το 1ο Θ. ισχύει, $M \cong R^n/\text{Ker} \neq$.

Πόρισμα: R αριστέρος δαυτύγιος της Noether (αντ. Artin)
 $\Leftrightarrow$ Κάθε πεπερασμένα παραχόμενο R -πρότυπο είναι της Noether (αντ. Artin).

Παρατήρηση: Αν $f: N \rightarrow M$ επιμορφισμός R -πρώτων
και N R -πρώτο της Noether (αντ. του Artin), τότε
το M είναι επίσης R -πρώτο της Noether (αντ. του Artin)
αφού $M \cong N / \ker f$.

Θεώρημα (Hopkins-Levitzki): R αριστερός (δεξιός) δακτύλιος
του Artin $\Rightarrow R$ αριστερός (δεξιός) δακτύλιος της Noether

! Δεν ισχύει για πρώτα