

Θεώρημα Βάσης του Hilbert

Αν ο R είναι αριστέρος (αντ. δεξίος) δαιτυλίας της Noether
τότε ο $R[X]$ είναι αριστέρος (αντ. δεξίος) δαιτυλίας της Noether

Αποδ. Έστω ότι ο $R[X]$ δεν έχει την ιδιότητα.

Τότε μπορούμε να βρούμε αριστέρο ιδεώδες I του $R[X]$
που δεν είναι πεττ. παραγόμενο. Προφανώς $I \neq \{0\}$.

Επιλέχουμε $f_1 \in I$ με τον ελάχιστο βαθμό

Αφού $I \neq (f_1)$ ($(f_1) = R[X] \cdot f_1$)

Επιλέχουμε πολυώνυμο $f_2 \notin (f_1)$ και γενικώς συνεχίζουμε

έτσι πολυώνυμα $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$ στο I ελαχίστου βαθμού με το
 $f_{m+1} \notin (f_1) + (f_2) + \dots + (f_m)$

Έστω $n_i = \deg f_i$ και a_i ο συντελεστής μεγιστοβαθμίου αρού
του f_i .

Έχουμε $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots$

Θεωρούμε την ακολουθία ιδεωδών του R

$$(a_1) \subseteq (a_1) + (a_2) \subseteq (a_1) + (a_2) + (a_3) \subseteq \dots$$

$$R \text{ της Noether} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N} \text{ τ.ω. } \sum_{i=1}^t (a_i) = \sum_{i=1}^{t+1} (a_i)$$

Οπότε $a_{t+1} \in \sum_{i=1}^t (a_i)$, δηλ $\exists r_1, r_2, \dots, r_t \in R$ τ.ω.

$$a_{t+1} = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_t a_t$$

$$\text{Έστω } f = \underbrace{f_{t+1}} - \sum_{i=1}^t r_i \underbrace{f_i} X^{n_{t+1} - n_i}$$

Οποτε

$$f = a_{t+1} X^{n_{t+1}} - \sum_{i=1}^t r_i a_i X^{n_{t+1}} + (\text{όροι βαθμού} < n_{t+1})$$

$$= (a_{t+1} - \sum_{i=1}^t r_i a_i) X^{n_{t+1}} + (\text{όροι βαθμού} < n_{t+1})$$

0

Οποτε $f \in I$, $f \notin (f_1) + \dots + (f_t)$ (γιατι διαφορετικά θα είχαμε $f_{t+1} \in (f_1) + \dots + (f_t)$) και $\deg f < n_{t+1}$.

ΑΤΟΠΟ, γιατί επιλέξαμε το f_{t+1} να είναι πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού με αυτήν την ιδιοτητα.

Αρα το I είναι πεττ. παραχόμενο και το $\mathbb{R}[X]$ είναι της Noether. ■

Πόρισμα: k σώμα $\Rightarrow k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ είναι δαυτιγίος της Noether.

Πόρισμα: Κάθε πεπερασμένα παραχόμενη μεταθετική k -άλγεβρα A είναι της Noether

Αποδ. $A \cong k[X_1, X_2, \dots, X_n]/I$ όπου I ιδεώδες

Θεώρημα: Έστω $A = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ τριγωνικός δακτυλίος
όπως νωρίτερα (με M (R,S) -πρότυπο)

A αρ. (δεξ) Noether (Artin) $\Leftrightarrow R, S$ αρ. (δεξ) Noether (Artin)
 M αρ. (δεξ) Noether (Artin)

Αποδ. Έστω A αρ. Noether.

$A/R \times M \cong S \Rightarrow S$ αρ. Noether

$A/M \times S \cong R \Rightarrow R$ αρ. Noether

Αν $N \leq M$, τότε $\begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ αριθμητικό ιδεώδες του A

$$\left(\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & rn \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall r \in R, s \in S, m \in M, n \in N$$

Οποσδήποτε αν $M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq \dots$ αύξουσα ακολουθία R -υποπρότυπων του M

τότε $\begin{pmatrix} 0 & M_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & M_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \dots$ αύξουσα ακολουθία

αρ. ιδεωδών του A . Αφού η δεύτερη σταθεροποιείται, το ίδιο και η

πρώτη. Άρα το M είναι R -πρότυπο της Noether.

Απο την άλλη έστω R, S, M αρ. της Noether

Το $R \oplus M$ είναι αριθμητικό R -πρότυπο της Noether

και το S είναι αριθμητικό S -πρότυπο της Noether

Οποιοδήποτε ^{αριθμητικό} ιδεώδες του A είναι αριθμητικό R και S -πρότυπο.

Έστω $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ μια αύξουσα ακολουθία αρ. ιδεωδών

του A . Έχουμε $I_j = (I_j \cap S) \oplus (I_j \cap (R \oplus M))$

Αφού οι ακολουθίες $I_j \cap S, I_j \cap (R \oplus M)$ σταθεροποιούνται,

το ίδιο ισχύει και για την $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$

↗ S μεταθετικός

Πρόταση 1: Έστω S περιοχή της Noether και $R = \text{Frac}(S) \neq S$
Τότε $A = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & S \end{pmatrix}$ είναι αρ. Noether, όχι δεξιά και ούτε αριστερός
ή δεξίος του Artin

Αποδ. R Noether, S Noether $\stackrel{\Theta}{\Rightarrow} A$ Noether

Επίσης αφού S περιοχή, S όχι σώμα $\Rightarrow S$ όχι Artin

$\stackrel{\Theta}{\Rightarrow} A$ όχι αριστερός ή δεξίος του Artin

Έστω τώρα ότι ο R είναι δεξί S -πρότυπο της Noether

Τότε ο R είναι πετ. παραχ ως S -πρότυπο

Έστω $R = \langle \frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2}, \dots, \frac{a_n}{s_n} \rangle$ με $a_i, s_i \in S$, $s_i \neq 0$

Τότε κάθε στοιχείο του R μπορεί να γραφτεί ως $\frac{a}{s}$ για κάποιο

$a \in S$ με $s = s_1 s_2 \dots s_n$. Αρα υπάρχει $a \in S$ ζ.ω.

$\frac{1}{s^2} = \frac{a}{s} \Rightarrow as = 1 \Rightarrow \frac{1}{s} \in S \Rightarrow R = S$ ΑΤΟΠΟ

Παράδειγμα - Άσκηση 3 Φυλλάδιο 3

$S = \mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Q}$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

Όπως παραπάνω αποδεικνύεται ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πετ. παραχ

$\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

$I_k := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 2^k \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ είναι ιδεώδες του A και $I_k \not\supseteq I_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$

Αρα A ούτε δεξίος ούτε αριστερός του Artin

$J_k := \begin{pmatrix} 0 & 2^{-k} \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεξί ιδεώδες του A και $J_k \not\supseteq J_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$

Αρα ο A δεν είναι δεξίος της Noether

Μένει να δείξουμε ότι ο A είναι αριστέρος της Noether

Α' τρόπος

Έχουμε ότι $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αριστέρο $\mathbb{Q}$ -πρότυπο της Noether
 $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ είναι αριστέρο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο της Noether

Θεωρούμε μια ακολουθία αυξανουσας αρ. ιδεωδων $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$

Τότε $I_j = (I_j \cap \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}) \oplus (I_j \cap \mathbb{Z})$ οπότε σταθεροποιείται

Β' τρόπος

Έστω $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Το J είναι αμφίπλευρο ιδεώδες του A

Έστω $\phi: A \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$, $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \mapsto (r, s)$

Η απεικόνιση ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων με $\text{Ker} \phi = J$

Αρα $A/J \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ δακτυλίας της Noether (όχι του Artin)

Απο την άλλη έστω N ένα αριστέρο A -υποπρότυπο του J

Τότε $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & rn \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N$

Οπότε $N \leq J$ αριστέρο A -υποπρότυπο $\Rightarrow N \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Αρα το J είναι αριστέρο A -υποπρότυπο της Noether

$\stackrel{\ominus}{\Rightarrow} A$ αριστέρος Noether και Artin

Πρόταση 2: Αν $S \subseteq R$ σώματα με $\dim_S R = \infty$, τότε ο $A = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & S \end{pmatrix}$ είναι αριστερός Noether και Artin, και όχι δεξιός Noether και Artin.

Αποδ. $\dim_S R = \infty \Rightarrow$ Μπορούμε να κατασκευάσουμε απείρες

αύξουσες ή φθίνουσες αυστηρά δεξιών ιδεωδών

$$\begin{pmatrix} 0 & V_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subsetneq \begin{pmatrix} 0 & V_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subsetneq \begin{pmatrix} 0 & V_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subsetneq \dots$$

όπου V_i S -υπόχωροι του R .

Από την άλλη το $J = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αμφίπλευρο ιδεώδες του A

Έστω $\phi: A \rightarrow R \times S, \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \mapsto (r, s)$

Η απεικόνιση ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων με $\text{Ker } \phi = J$

Έχουμε $A/\text{Ker } \phi \cong R \times S$ έχει 4 ιδεώδη, άρα είναι της αριστερό Noether και του Artin. Από την άλλη έστω $N \leq J$ A -υποπρότυπο

$$\text{Τότε } \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & rn \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N$$

Οπότε $N \leq J$ αριστερό A -υποπρότυπο $\Rightarrow N \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Άρα το J είναι αριστερό A -υποπρότυπο της Noether και του Artin

$\Rightarrow A$ αριστερός Noether και Artin

Παράδειγμα:

$$R = \mathbb{R}, S = \mathbb{Q}$$