

Υπολογιστες ασκήσεις φυλλαδίου 3

(1) Quaternion ring : $ij = -ji = k \Rightarrow k^2 = -ijji = -1$

$$a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k = x \in \mathbb{H}$$

$$\bar{x} := a \cdot 1 - b \cdot i - c \cdot j - d \cdot k$$

$$x\bar{x} = a^2 \cdot 1 + \cancel{abi} + \cancel{acj} + \cancel{adk}$$

$$- \cancel{abi} + b^2 \cdot 1 + \cancel{bck} - \cancel{bdj}$$

$$- \cancel{acj} - \cancel{bck} + c^2 \cdot 1 + \cancel{cdi}$$

$$- \cancel{adk} + \cancel{bdj} - \cancel{cdi} + d^2 \cdot 1 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot 1 = \dots = \bar{x}x$$

Αρα x αντιστρέψιμο $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ αντιστρέψιμο

Quaternion / $\mathbb{Q}$: Δακτύλιος διαιρέσης

Quaternion / $\mathbb{Z}$: $\mathbb{H}^* = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ Quaternion group

(2) R δακτύλιος διαιρέσης, I ορισμένο ιδεώδες

Αν $I \neq \{0\}$, $\exists a \in I, a \neq 0$. Τότε $1 = a^{-1}a \in I \Rightarrow I = R$

Αν R έχει μόνο 2 ιδεώδη, το $\{0\}$ και το R , τότε για κάθε

$a \in R, a \neq 0$ έχουμε $Ra = R$. Οπότε υπάρχει $x \in R$ τ.ω. $xa = 1$

Έχουμε $x \neq 0$, οπότε $Rx = R$. Οπότε υπάρχει $y \in R$ τ.ω. $yx = 1$

Έχουμε $y = y \cdot 1 = y \cdot (xa) = (yx) \cdot a = 1 \cdot a = a$

Αρα $xa = ax = 1$ και το a είναι αντιστρέψιμο.

Απλή και ημιαπλή πρότυπα

Ορισμός Ένα R -πρότυπο $M \neq \{0\}$ θα λέγεται απλό (ή ανάγωγο) αν έχει ακριβώς 2 υποπρότυπα, το $\{0\}$ και τον εαυτό του

Πρόταση: Τα αμοιβαία είναι ισοδύναμα :

(i) M απλό R -πρότυπο

(ii) $M = (x) \quad \forall x \in M \setminus \{0\}$

(iii) $M \cong R/I$ για κάποιο μέγιστο ιδεώδες του R

Αποδ. (i) $\Rightarrow$ (ii)

$(x) \leq M, (x) \neq 0 \Rightarrow (x) = M$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω $N \leq M, N \neq \{0\}$

Αν $x \in N$, τότε $M = (x) \leq N$, και άρα $M = N$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$M \cong R/\text{Ann}_R(x) \quad \forall x \in M \setminus \{0\}$. Έχουμε M απλό αφού (ii) $\Leftrightarrow$ (i).

Αν $\text{Ann}_R(x) \subseteq J$, J αριστερό ιδεώδες του R , τότε

$J/\text{Ann}_R(x) \leq R/\text{Ann}_R(x)$

Αφού $R/\text{Ann}_R(x)$ απλό, τότε $J = R$ ή $J = \text{Ann}_R(x)$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Αν $N \leq M$, τότε $N = J/I$ για $I \leq J$. Αρα $N = 0$ ή $N = M$

Παραδείγματα:

- V k -διαν. χώρος $\dim_k V = 1 \Rightarrow V$ απλό
 $\dim_k V > 1 \Rightarrow V$ όχι απλό
- Αν I ιδεώδες του $\mathbb{Z}$, τότε I όχι απλό
- $M = \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$, $R = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Τότε M απλό (Άσκηση)

Πρόταση (Λήμμα του Schur)

- (α) Αν M, N απλά R -πρότυπα και $f: M \rightarrow N$ ομομορφισμός R -πρότυπων, τότε $f = 0$ ή f ισομορφισμός απλό
- (β) Αν M R -πρότυπο, τότε $\text{End}_R(M) = \{f: M \rightarrow M \mid f \text{ } R\text{-ομομ.}\}$ είναι δαυτούχιος δαίρεσης (Φ1 A1 $\Rightarrow$ Δακτύχιος με $1 = \text{id}_M$)

Απόδ (α) $\ker f \leq M$, M απλό

Αν $\ker f = M$, τότε $f = 0$

Αν $\ker f = 0$, τότε f 1-1

$\text{Im } f \leq N$, N απλό

Αν $\text{Im } f = 0$, τότε $f = 0$

Αν $\text{Im } f = N$, τότε f επί

(β) Πρώτα απ' όλα $\text{End}_R(M)$ είναι δαυτούχιος με :

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m)$$

$$(f \cdot g)(m) = f(g(m))$$

Μόλις δείξουμε ότι, αν M απλό, τότε $\forall f \in \text{End}_R(M) \setminus \{0\}$, $\exists f^{-1}$.

Ορισμός: Ένα R -πρότυπο ονομάζεται ημιαπλό αν για κάθε υποπρότυπο $N \leq M$ υπάρχει υποπρότυπο $N' \leq M$ με $M = N \oplus N'$

Παραδείγματα: • $M = \{0\}$

- M απλό $\Rightarrow M$ ημιαπλό
- V k -διαν. χώρος $\Rightarrow V$ ημιαπλό
- $\mathbb{Z}$ όχι ημιαπλό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο γιατί για οποιαδήποτε δύο ιδεώδη $I, J \neq \{0\}$ έχουμε $I \cap J \neq \{0\}$ (Φ2 A7)

Πρόταση: Έστω M ένα ημιαπλό R -πρότυπο και $N \leq M$.

Τότε τα πρότυπα N και M/N είναι ημιαπλά

Αποδ. Έστω $K \leq N$. Τότε $K \leq M$ και άρα υπάρχει $K' \leq M$ τ.ω. $M = K \oplus K'$

Θα δείξουμε ότι $N = K \oplus (K' \cap N)$

$$K \cap (K' \cap N) \subseteq K \cap K' = \{0\}$$

Επίσης αν $n \in N$, τότε $n \in M$ και άρα $n = k + k'$ με $k \in K, k' \in K'$

Αφού $k \in K \subseteq N$ έχουμε $k' \in N \cap K'$.

Τώρα, αν $K \leq M/N$, τότε υπάρχει L με $N \leq L \leq M$ τ.ω. $K = L/N$

Αφού M ημιαπλό, υπάρχει $L' \leq M$ τ.ω. $L \oplus L' = M$

Θα δείξουμε ότι $M/N = K \oplus L'/N$

Αν $m+N \in M/N$, τότε $m = l + l'$, και άρα $m+N = l+N + l'+N$

για κάποια $l \in L, l' \in L'$.

Αν $m+N \in L/N \cap (L'+N)/N$, τότε $m+N = l+N = l'+N$

για κάποια $l \in L, l' \in L'$

Έχουμε $l'-l \in N \leq L$ και άρα $l' \in L$. Αφού $L \cap L' = \{0\}$, έχουμε $m+N = 0+N = N$

Λήμμα: Αν $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$ είναι μια αύξουσα αλυσίδα υποπροτύπων του M , τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \leq M$

Πρόταση: Έστω $M \neq \{0\}$ ημιαπλό. Τότε $\exists N \leq M$ απλό.

Απόδ Έστω $x \in M \setminus \{0\}$ και $S := \{N \leq M \mid x \notin N\}$

$\{0\} \in S$, οπότε $S \neq \emptyset$

Έστω $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$ μια αύξουσα αλυσίδα υποπροτύπων του S
Τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \in S$ άνω φράγμα

Από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μέγιστο στοιχείο $K \in S$

Αφού M ημιαπλό, υπάρχει $K' \leq M$ τ.ώ. $M = K \oplus K'$.

Επίσης $K' \neq 0$ γιατί $x \in M$ αλλά $x \notin K$

Απο την προηγούμενη πρόταση, το K' είναι ημιαπλό.

Αρα αν $L \leq K'$, $L \neq K'$, ο υπάρχει $L' \leq K'$, $L' \neq K'$, ο τ.ώ. $K' = L \oplus L'$

Αφού K μέγιστο στο S , έχουμε $x \in K \oplus L$ και $x \in K \oplus L'$

Όμως $(K \oplus L) \cap (K \oplus L') = K$, Αρα $x \in K$: ΑΤΟΠΟ

Καταλήγουμε ότι το K' είναι απλό R -πρότυπο

Εφαρμογή:

Το $\mathbb{Z}$ δεν είναι ημιαπλό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, γιατί δεν έχει απλά υποπρότυπα.