

Θεώρημα: Τα αὐτομορφισμοί είναι ισοδύναμα για R -πρότυπο $M \neq \{0\}$:

(1) M ημιαπλὸ

(2) M είναι το άθροισμα όλων των απλών υποπρότυπων του

(3) M είναι το άθροισμα απλών υποπρότυπων

(4) M είναι το εὐθύ άθροισμα απλών υποπρότυπων

Απόδ (1) $\Rightarrow$ (2)

Έστω $(M_i)_{i \in I}$ η συλλογή όλων των απλών υποπρότυπων του M
(από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχουν απλά υποπρότυπα)

Έστω $N = \sum M_i$. Αφού M ημιαπλὸ, υπάρχει $N' \leq M$ τω. $N \oplus N' = M$

M ημιαπλὸ $\Rightarrow N'$ ημιαπλὸ Αν $N' \neq 0$, υπάρχει απλὸ υποπρότυπο του N' , το οποίο περιέχεται στο $\sum_{i \in I} M_i$. Άρα $N' = 0$

(2) $\Rightarrow$ (3)

Προφανές

(3) $\Rightarrow$ (1)

Έστω $M = \sum_{i \in I} M_i$, M_i απλά και $N \leq M$ $\sum M_j = \bigoplus M_j$ and $N \cap (\sum M_j) = \{0\}$
 $S = \{J \subseteq I \mid N + \sum_{j \in J} M_j = N \oplus \bigoplus_{j \in J} M_j\}$

$S \neq \emptyset$ γιατί $\emptyset \in S$

Έστω $J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$ μια αύξουσα αλυσίδα στο S

Τότε $\bigcup_k J_k \in S$ ανω φράγμα

Από το Λήμμα του Zorn υπάρχει μέγιστο στοιχείο J

Αν $M' := N \oplus \bigoplus_{j \in J} M_j \neq M$, τότε υπάρχει $m \in M \setminus M'$

Γράφουμε $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$, $m_i \in M_i$

Αρα υπάρχει i τ.ω. $M_i \not\subseteq M'$

Έχουμε $M_i \cap M' \leq M_i$ και αφού M_i απλό, πρέπει $M_i \cap M' = 0$

Όμως τότε $\bigcup \{i\} \in S$: ΑΤΟΠΟ

Αρα $M' = M$ και $N \oplus N' = M$ όπου $N' = \bigoplus_{j \in J} M_j$

(3) $\Rightarrow$ (4)

Όπως το (3) $\Rightarrow$ (1) για $N = 0$

(4) $\Rightarrow$ (3)

Προφανές

Ορισμός: Ένας δακτύλιος R λέγεται αριστερά (αντ. δεξιά)

ημιαπλός αν είναι ημιαπλό αριστερό (αντ. δεξιό) R -πρότυπο

Παρατήρηση: Θα αποδείξουμε αργότερα ότι

R αριστερά ημιαπλός $\Leftrightarrow R$ δεξιά ημιαπλός

Απο εκεί και πέρα, θα λέμε απλά «ημιαπλός δακτύλιος»

Πρόταση: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα δακτύλιο R :

(1) R (αριστερά) ημιαπλός

(2) Κάθε κυκλικό R -πρότυπο είναι ημιαπλό

(3) Κάθε R -πρότυπο είναι ημιαπλό

(4) Κάθε πεπερασμένα παραχόμενο R -πρότυπο είναι ημιαπλό

Αποδ $(1) \Rightarrow (2)$

Έστω $M = (x)$ ένα κυκλικό R -πρότυπο. Τότε $M \cong R / \text{Ann}_R(x)$
που είναι ημιαπλό ως πηλικο ημιαπλού R -προτύπου.

$(2) \Rightarrow (3)$

$$M = \sum_{x \in M} (x)$$

(x) ημιαπλό $\Rightarrow (x)$ άθροισμα απλών R -προτύπων $\Rightarrow$

M άθροισμα απλών R -προτύπων $\Rightarrow M$ ημιαπλό

$(3) \Rightarrow (4)$

Προφανές

$(4) \Rightarrow (1)$

$R = (1_R)$ ως R -πρότυπο $\Rightarrow R$ ημιαπλό R -πρότυπο

Πρόταση Έστω R ένας (αριστερά) ημιαπλός δαυτύγιος. Τότε

(1) Υπάρχουν ελάχιστια αριστερά ιδεώδη $I_1, I_2, \dots, I_n$ τ.ω.

$$R = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$$

(2) Ο δαυτύγιος R είναι (αριστεράς) δαυτύγιος και της Noether
και του Artin

Αποδ $(1) R$ ημιαπλός $\Rightarrow R = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ για κάποια ομογένεια ελαχιστιων
αριστερών ιδεωδών (αντιστοιχούν στα απλά R -υποπρότυπα)

Έστω $1 = e_1 \oplus e_2 \oplus \dots \oplus e_n$ με $e_j \in I_j$ για $j=1, \dots, n$

Τότε $r = re_1 \oplus re_2 \oplus \dots \oplus re_n \quad \forall r \in R$, οπότε $R = \bigoplus_{j=1}^n I_j$.

(2) Έστω $R = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$ όπως πριν

Κάθε I_j έχει μόνο 2 υποπροτύπα, άρα είναι και της Noether και του Artin. Η ιδιότητα μεταφέρεται στο ευθύ άθροισμα

Πόρισμα: (1) R_1, R_2 ημιαπλοί $\Rightarrow R_1 \times R_2$ ημιαπλός

(2) R ημιαπλός $\Rightarrow$ Κάθε πεπερασμένα παραχόμενο R -πρότυπο είναι της Noether και του Artin

Λήμμα*: Τα στοιχεία $e_1, \dots, e_n$ που εμφανίζονται στην προηγούμενη απόδειξη έχουν τις εξής ιδιότητες:

$$(1) e_i^2 = e_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$(2) e_i e_j = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ με } i \neq j$$

$$(3) I_j = (e_j) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$(4) \text{ Αν } M \text{ είναι απλό } R\text{-πρότυπο, τότε } M \cong I_j \text{ για κάποιο } j \in \{1, \dots, n\}$$

Αποδ. $1 = e_1 \oplus \dots \oplus e_n$

$$\Rightarrow e_i \cdot 1 = e_i e_1 \oplus \dots \oplus e_i^2 \oplus \dots \oplus e_i e_n \in I_i$$

$$\Rightarrow e_i = e_i^2 \text{ και } e_i e_j = 0 \text{ για } i \neq j$$

$$\text{Αν τώρα } r \in I_j, \text{ έχουμε } r = r e_1 \oplus \dots \oplus r e_n \in I_j, \text{ οπότε } r = r e_j$$

$$\text{Τέλος, αν } M \text{ είναι απλό } R\text{-πρότυπο, τότε } M = (x) \quad \forall x \in M \setminus \{0\}$$

$$\text{Έστω } f: R \rightarrow M, r \mapsto rx \in \text{Hom}_R(R, M)$$

$$\text{Τότε } f|_{I_j} \in \text{Hom}_R(I_j, M) \text{ για κάθε } j = 1, \dots, n$$

Από το Λήμμα του Schur, έχουμε $f|_{I_j} = 0$ ή $f|_{I_j}$ ισομορφισμός

Αν $f|_{I_j} = 0 \quad \forall j$, τότε $e_j x = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow x = 1 \cdot x = (e_1 + \dots + e_n) \cdot x = 0$ ΑΤΟΠΟ

Αρα $\exists I_j$ τ.ώ. $M \cong I_j$

Ορισμός Ένας δακτύλιος R λέγεται απλός αν τα μόνα αμφίπλευρα ιδεώδη του είναι το $\{0\}$ και το R

Παραδείγματα:

Τα σώματα και οι δακτύλιοι διαίρεσης είναι απλοί δακτύλιοι

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- R απλός R -πρότυπο $\Leftrightarrow$ Τα μόνα αριστερά ιδεώδη του R είναι το $\{0\}$ και το R

- R απλός R -πρότυπο $\Rightarrow R$ απλός δακτύλιος



- R ημιαπλός R -πρότυπο $\Leftrightarrow R$ ημιαπλός δακτύλιος

- R απλός R -πρότυπο $\Rightarrow R$ ημιαπλός δακτύλιος

- R απλός δακτύλιος $\nRightarrow R$ ημιαπλός δακτύλιος

Θα δούμε αργότερα ότι: Αν R απλός, τότε

R ημιαπλός $\Leftrightarrow R$ αριστερός του Artin