

Υπενθυμίσεις:

- R αριστερά (αντ. δεξιά) ημιπλήρως αν για κάθε αριστερό (αντ. δεξιό) ιδεώδες I υπάρχει αριστερό (αντ. δεξιό) ιδεώδες J τ.ω. $I \oplus J = R$
Ισοδύναμα ο R είναι (ευθύ) άθροισμα ελαχιστιμίων αριστερών (αντ. δεξιών) ιδεωδών. Έχουμε δείξει ότι υπάρχουν τότε $I_1, \dots, I_n$ ελαχιστιμιά αριστερά (αντ. δεξιά) ιδεώδη τ.ω.

$$R = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$$

Έχουμε $I_j = (e_j)$ με $e_j^2 = e_j$, $e_i e_j = 0$ για $i \neq j$ και $\sum_{j=1}^n e_j = 1$

Αν M είναι απλό R -πρότυπο, τότε $M \cong I_j$ για κάποιο $j \in \{1, \dots, n\}$

- R αριστερά (αντ. δεξιά) ημιπλήρως $\Rightarrow R$ αριστερός (αντ. δεξιός) δακτύλιος της Noether και του Artin
- R_1, R_2 αριστερά (αντ. δεξιά) ημιπλήροι $\Rightarrow R_1 \times R_2$ αριστερά (αντ. δεξιά) ημιπλήρως
- R απλός αν έχει μόνο 2 ιδεώδη

Πρόταση: Έστω D ένας δακτύλιος διαιρέσης. Ο δακτύλιος $R := M_n(D)$

έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Είναι απλός

(2) Υπάρχει ένα μοναδικό απλό R -πρότυπο τ.ω. $R \cong nV = \bigoplus_{i=1}^n V$

(3) R είναι δεξιά (αριστερά) ημιπλήρως

(4) R είναι δεξιός (αριστερός) δακτύλιος της Noether και του Artin

(5) $\text{End}_R V \cong D^{\text{op}}$

Παράδειγμα: $n=2$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in D \right\} \quad \sharp : D \longrightarrow \text{End}_R(V)$$

Αριστερά

$$\lambda \longmapsto \sharp_\lambda : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\lambda \\ y\lambda \end{pmatrix}$$

$$\sharp_\lambda \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = \sharp_\lambda \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+x')\lambda \\ (y+y')\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\lambda + x'\lambda \\ y\lambda + y'\lambda \end{pmatrix} = \sharp_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sharp_\lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\sharp_\lambda \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \sharp_\lambda \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax\lambda+by\lambda \\ cx\lambda+dy\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\lambda \\ y\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sharp_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\sharp_{\lambda\mu} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\lambda\mu \\ y\lambda\mu \end{pmatrix} = \sharp_\mu \begin{pmatrix} x\lambda \\ y\lambda \end{pmatrix} = \sharp_\mu \sharp_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \sharp(\lambda\mu) = \sharp(\mu)\sharp(\lambda)$$

$$\text{Αρα } D \cong (\text{End}_R(V))^{\text{op}} \text{ ή } \text{End}_R(V) \cong D^{\text{op}}$$

$$V = \{ (x \ y) \mid x, y \in D \} \quad \sharp : D \longrightarrow \text{End}_R(V)$$

Δεξιά

$$\lambda \longmapsto \sharp_\lambda : (x \ y) \mapsto (\lambda x \ \lambda y)$$

$$\sharp_\lambda \left((x \ y) + (x' \ y') \right) = \sharp_\lambda (x \ y) + \sharp_\lambda (x' \ y')$$

$$\begin{aligned} \sharp_\lambda \left((x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &= \sharp_\lambda (xa+y\ c, \ xb+y\ d) = (\lambda xa + \lambda y\ c, \ \lambda xb + \lambda y\ d) \\ &= (\lambda x \ \lambda y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \sharp_\lambda (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\sharp_{\lambda\mu} (x \ y) = (\lambda\mu x \ \lambda\mu y) = \sharp_\lambda (\mu x \ \mu y) = \sharp_\lambda \sharp_\mu (x \ y) \Rightarrow \sharp(\lambda\mu) = \sharp(\lambda)\sharp(\mu)$$

$$\text{Αρα } \text{End}_R(V) \cong D$$

Λήμμα (A) Η απεικόνιση $\varphi: R \rightarrow \text{End}_R({}_R R)^{\text{op}}, r \mapsto (x \mapsto xr)$ είναι
 ισομορφισμός δακτυλίων, οπότε $R \cong \text{End}_R({}_R R)^{\text{op}}$ ως δακτύλιοι

Απόδ Για κάθε $r \in R$, ορίζουμε την απεικόνιση $\chi_r: R \rightarrow R, x \mapsto xr$

$$\left. \begin{aligned} \chi_r(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2)r = x_1r + x_2r = \chi_r(x_1) + \chi_r(x_2) \\ \chi_r(ax) &= (ax)r = a(xr) = a\chi_r(x) \quad \forall a \in R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \chi_r \in \hat{\text{End}}_R({}_R R)$$

$$\varphi(1) = \text{id}_R, \varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2) \text{ και}$$

$$\varphi(r_1 r_2)(x) = x(r_1 r_2) = (x r_1) r_2 = \chi_{r_2} \chi_{r_1}(x) \Rightarrow \varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_2) \varphi(r_1)$$

$$\text{Ker } \varphi = \{r \in R \mid xr = 0 \quad \forall x \in R\} \stackrel{1 \in R}{=} \{0\}$$

$$\text{Αν } f \in \text{End}_R({}_R R)^{\text{op}}, \text{ τότε } f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = \chi_{f(1)}(x)$$

$$\text{Αρα } f = \varphi(f(1)), \text{ οπότε } f \in \text{Im } \varphi$$

Λήμμα (B) Η απεικόνιση $\varphi: R \rightarrow \text{End}_R(R_R), r \mapsto (x \mapsto rx)$ είναι
 ισομορφισμός δακτυλίων, οπότε $R \cong \text{End}_R(R_R)$ ως δακτύλιοι

Απόδ Για κάθε $r \in R$, ορίζουμε την απεικόνιση $\chi_r: R \rightarrow R, x \mapsto rx$

$$\left. \begin{aligned} \chi_r(x_1 + x_2) &= r(x_1 + x_2) = rx_1 + rx_2 = \chi_r(x_1) + \chi_r(x_2) \\ \chi_r(xa) &= r(xa) = (rx)a = \chi_r(x)a \quad \forall a \in R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \chi_r \in \hat{\text{End}}_R(R_R)$$

$$\varphi(1) = \text{id}_R, \varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2) \text{ και}$$

$$\varphi(r_1 r_2)(x) = (r_1 r_2)x = r_1(r_2 x) = \chi_{r_1} \chi_{r_2}(x) \Rightarrow \varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_1) \varphi(r_2)$$

$$\text{Ker } \varphi = \{r \in R \mid rx = 0 \quad \forall x \in R\} \stackrel{1 \in R}{=} \{0\}$$

$$\text{Αν } f \in \text{End}_R(R_R), \text{ τότε } f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) \cdot x = \chi_{f(1)}(x)$$

$$\text{Αρα } f = \varphi(f(1)), \text{ οπότε } f \in \text{Im } \varphi$$

Θεώρημα (Wedderburn - Artin)

Έστω R ένας δεξιά (αντ. **αριστερά**) ημιαπλός δαυτύλιος

Τότε $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_t}(D_t)$

για κάποιους δαυτύλιους διαίρεσης $D_1, \dots, D_t$ και $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$

Υπάρχουν αυριβώς t απλά R -πρότυπα, αμοιβαίως μη ισομόρφα.

$V_1, \dots, V_t$, και τα ζεύγη (n_i, D_i) είναι μοναδικά καθορισμένα.

Απόδ $R = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$ όπου I_j ελαχιστιδιά ιδεώδη

Μπορούμε να γράψουμε $R \cong n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \dots \oplus n_t V_t$

όπου V_i απλά R -πρότυπα τ.ω. $V_i \not\cong V_j$ για $i \neq j$

και για κάθε $k \in \{1, \dots, n\} \exists i \in \{1, \dots, t\}$ τ.ω. $I_k \cong V_i$

Αν τώρα V είναι ένα απλό R -πρότυπο, $V \cong V_i$ για κάποιον i

από το Λήμμα $\star$.

Από το Λήμμα του Schur έχουμε $\text{End}_R(V_i) \cong D_i$ δαυτύλιος διαίρεσης

και από το προηγούμενο μάθημα, $\text{End}_R(n_i V_i) \cong M_{n_i}(D_i)$

$R \cong \text{End}_R(R_R) \cong \text{End}_R(n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \dots \oplus n_t V_t)$

$\cong \text{End}_R(n_1 V_1) \times \text{End}_R(n_2 V_2) \times \dots \times \text{End}_R(n_t V_t)$

$\cong M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \dots \times M_{n_t}(D_t)$

Η μοναδικότητα της γραφής προκύπτει από το Θεώρημα

Jordan - Hölder, που θα δούμε σε λίγο.

Θεώρημα (Wedderburn - Artin)

Έστω R ένας δεξιά (αντ. **αριστερά**) ημιπληθής δαυτύλιος

Τότε $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_t}(D_t)$

για κάποιους δαυτύλιους διαίρεσης $D_1, \dots, D_t$ και $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$

Υπάρχουν αυριβώς t απλά R -πρότυπα, αμοιβαίως μη ισομόρφα.

$V_1, \dots, V_t$, και τα ζεύγη (n_i, D_i) είναι μοναδικά καθορισμένα.

Απόδ $R = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$ όπου I_j ελαχιστιδιά ιδεώδη

Μπορούμε να γράψουμε $R \cong n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \dots \oplus n_t V_t$

όπου V_i απλά R -πρότυπα τ.ω. $V_i \not\cong V_j$ για $i \neq j$

και για κάθε $k \in \{1, \dots, n\} \exists i \in \{1, \dots, t\}$ τ.ω. $I_k \cong V_i$

Αν τώρα V είναι ένα απλό R -πρότυπο, $V \cong V_i$ για κάποιο i

από το Λήμμα $\star$.

Από το Λήμμα του Schur έχουμε $\text{End}_R(V_i) \cong D_i$ δαυτύλιος διαίρεσης

και από το προηγούμενο μάθημα, $\text{End}_R(n_i V_i) \cong M_{n_i}(D_i)$

$$\begin{aligned} R &\cong \text{End}_R({}_R R)^{\text{op}} \cong \text{End}_R(n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \dots \oplus n_t V_t)^{\text{op}} \\ &\cong \text{End}_R(n_1 V_1)^{\text{op}} \times \text{End}_R(n_2 V_2)^{\text{op}} \times \dots \times \text{End}_R(n_t V_t)^{\text{op}} \\ &\cong M_{n_1}(D_1)^{\text{op}} \times M_{n_2}(D_2)^{\text{op}} \times \dots \times M_{n_t}(D_t)^{\text{op}} \\ &\cong M_{n_1}(D_1^{\text{op}}) \times M_{n_2}(D_2^{\text{op}}) \times \dots \times M_{n_t}(D_t^{\text{op}}) \end{aligned}$$

Η μοναδικότητα της γραφής προκύπτει από το Θεώρημα

Jordan - Hölder, που θα δούμε σε λίγο.

Πόρισμα: R αριστερά ημιαπλός $\Leftrightarrow R$ δεξιά ημιαπλός

Ορισμός: Θα λέμε πως ένας δακτύλιος είναι ημιαπλός αν είναι αριστερά ημιαπλός.

Πόρισμα: R μεταδεξιός ημιαπλός $\Leftrightarrow$ Υπάρχουν σώματα $F_1, \dots, F_t$ τ.ω. $R \cong F_1 \times \dots \times F_t$

Θεώρημα (Wedderburn - 1907) Έστω k σώμα

Αν A είναι ημιαπλή k -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης, τότε

$$A \cong M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_t}(D_t)$$

όπου $n_i \in \mathbb{N}$ και D_i είναι k -άλγεβρες διαίρεσης πεπερασμένης διάστασης. Αν επιπλέον k είναι αλγεβρικά κλειστό, $D_i = k \ \forall i$.

Αποδ. Άσκηση

Εφαρμογή:

Ταξινόμηση όλων των ημιαπλών αλγεβρών διάστασης 5 επί του $\mathbb{C}$:

$$A \cong M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$$

ή

$$A \cong \mathbb{C}^5$$

Θεώρημα: Έστω R απλός δακτύλιος. Τα αόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) R είναι αριστερά του Artin

(2) R είναι (αριστερά) ημιαπλός

(3) R έχει ελαχιστιυό αριστερό ιδεώδες

(4) $R \cong M_n(D)$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και δακτύλιο διαίρεσης D

Αποδ. Wedderburn - Artin: (2) $\Leftrightarrow$ (4)

Επίσης (2) $\Rightarrow$ (1) έχει γίνει και (1) $\Rightarrow$ (3) εξ ορισμού

Θ.δ.α (3) $\Rightarrow$ (2)

Έστω I ελαχιστιυό ιδεώδες, τότε I απλό R -πρότυπο ($I \neq 0$)

Έστω $B := \sum_{\substack{J \text{ ελαχιστιυό ιδεώδες του } R \\ J \cong I \text{ ως } R\text{-πρότυπο}}} J$.

Θ.δ.ό B ιδεώδες του $R \xrightarrow{R \text{ απλός}} B = R \Rightarrow R$ ημιαπλός

Προφανώς το B είναι αριστερό ιδεώδες του R

Έστω J ελαχιστιυό, με $J \cong I$ ως R -πρότυπο και $r \in R$

Έστω $f_r: J \rightarrow R \in \text{Hom}_R(J, R)$

$$x \mapsto xr$$

Έχουμε $\text{Ker } f_r = \{0\}$ ή $\text{Ker } f_r = J$, οπότε είτε $Jr = 0$ είτε $Jr \cong J$

Σε κάθε περίπτωση $Jr \subseteq B$, οπότε $Br \subseteq B$

Το Θέωρημα Jordan-Hölder για πρότυπα

Έστω R δακτύλιος, M R -πρότυπο, $M \neq 0$

Ορισμός: Μια σειρά σύνδεσης του M είναι μια σειρά προτύπων

$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$ τ.ω. M_i / M_{i-1} είναι απλό

R -πρότυπο $\forall i = 1, \dots, n$. Τα M_i / M_{i-1} λέγονται παράγοντες σύνδεσης και το n λέγεται μήκος της σειράς.

Παρατήρηση: M/N απλό $\Leftrightarrow$ Τα μόνα υποπρότυπα του M που περιέχουν το N είναι το M και το N (N maximal)

Πρόταση: M Noether και Artin $\Rightarrow M$ έχει σειρά σύνδεσης (πεπερ.)

Απόδ M Noether $\Rightarrow \exists M_1 \subsetneq M$ μεγιστιυό

Τότε M/M_1 απλό

Αν $M_1 \neq 0$, τότε M_1 Noether $\Rightarrow \exists M_2 \subsetneq M_1$ μεγιστιυό

Τότε M_1/M_2 απλό

Συνεχίζουμε έτσι και κατασκευάζουμε μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία υποπροτύπων, η οποία γίνεται στάσιμη αφού M Artin

Για να γίνει όμως στάσιμη πρέπει το τελευταίο πρότυπο να είναι μηδενιυό

Θ (Jordan-Hölder)

M έχει σειρά σύνδεσης $\Rightarrow M$ Noether & Artin

$$\text{Αν } 0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M \quad (1)$$

$$\text{και } 0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_{m-1} \subsetneq N_m = M \quad (2)$$

είναι δύο σειρές σύνδεσης του M , τότε $m = n$ και

υπάρχει αντιστοιχία $\varphi: \{M_i/M_{i-1} : i=1, \dots, n\} \leftrightarrow \{N_i/N_{i-1} : i=1, \dots, n\}$

τ.ω. $M_i/M_{i-1} \cong \varphi(M_i/M_{i-1})$

Ισοδύναμα, υπάρχει $\sigma \in S_n$ τ.ω. $M_i/M_{i-1} \cong N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i)-1}$

Αποδ. Επαγωγή στο ελάχιστο μήκος σειράς για ένα πρότυπο.

(ή στο $\dim_k M$ για R k -άλγεβρα πεπ. διάστασης)

Ας υποθέσουμε ότι η σειρά (1) έχει ελάχιστο μήκος.

Αν $n=1$, τότε το M είναι απλό και η μόνη σειρά σύνδεσης που έχει το M είναι $0 = M_0 \subsetneq M_1 = M$. Επίσης M Noether & Artin

Έστω $n > 1$. Έχουμε $m \geq n$. Θέτουμε $K = M_{n-1} \cap N_{m-1}$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $M_{n-1} = N_{m-1}$, τότε $K = M_{n-1} = N_{m-1}$. Τότε από την υπόθεση επαγωγής για το K έχουμε $n-1 = m-1$ και οι παράγοντες των σειρών $0 = M_0 \subsetneq \dots \subsetneq M_{n-1} = K$ και $0 = N_0 \subsetneq \dots \subsetneq N_{n-1} = K$ είναι οι ίδιοι. Επίσης $M/M_{n-1} = M/K = M/N_{n-1}$

- Αν $M_{n-1} \neq N_{m-1}$ τότε $K \neq M_{n-1}$ και $K \neq N_{m-1}$, αφού M_{n-1}, N_{m-1} μέγιστοι. Για τον ίδιο λόγο $M_{n-1} + N_{m-1} = M$. Από το 2^ο Θ.Ι. έχουμε $M_{n-1}/K \cong M/N_{m-1}$ και $N_{m-1}/K \cong M/M_{n-1}$ απλά

M_{n-1} Noether & Artin $\Rightarrow K$ Noether & Artin

Αρα το K έχει σειρά σύνδεσης

$$0 = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \dots \subsetneq K_{l-1} \subsetneq K_l = K$$

Οπότε παίρνουμε τις παρακάτω σειρές σύνδεσης για το M :

$$0 = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \dots \subsetneq K_{l-1} \subsetneq K_l = K \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M \quad (*)$$

$$0 = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \dots \subsetneq K_{l-1} \subsetneq K_l = K \subsetneq N_{m-1} \subsetneq M \quad (**)$$

Όμως το M_{n-1} έχει σειρά σύνδεσης με μήκος $n-1$, οπότε

από την επαγωγική υπόθεση $l+1 = n-1$ και η σειρά $(*)$

έχει τους ίδιους παράγοντες σύνδεσης με τη σειρά

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M$$

Επίσης το N_{m-1} έχει σειρά σύνδεσης με μήκος $l+1 = n-1$

οπότε από την επαγωγική υπόθεση η σειρά $(**)$

έχει τους ίδιους παράγοντες σύνδεσης με τη σειρά

$$0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_{m-1} \subsetneq M$$

$$\text{Αρα } m-1 = l+1 = n-1 \Rightarrow \boxed{m=n}$$

Οι παράγοντες σύνδεσης της σειράς $(*)$ είναι:

$$K_1/K_0, K_2/K_1, \dots, K_l/K_{l-1}, M_{n-1}/K \cong M/N_{n-1}, M/M_{n-1}$$

Οι παράγοντες σύνδεσης της σειράς $(**)$ είναι:

$$K_1/K_0, K_2/K_1, \dots, K_l/K_{l-1}, N_{n-1}/K \cong M/M_{n-1}, M/N_{n-1}$$

Επομένως οι σειρές (1) & (2) έχουν τους ίδιους παράγοντες σύνδεσης.

Τέλος $M/M_{n-1}, M_{n-1}$ Noether & Artin $\Rightarrow M$ Noether και Artin

Παρατήρηση:

Αν M ημιαπλός, Noether & Artin τότε $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, M_i απλά
 $0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_1 \oplus M_2 \subsetneq M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \subsetneq \dots \subsetneq M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n = M$

Έστω $N_j = M_1 \oplus \dots \oplus M_j$

Τότε $N_j \oplus M_{j+1} / N_j \cong M_{j+1} / M_{j+1} \cap N_j \cong M_j$