Λήμμα: Το άθροισμα μηδενοδύναμων αριστερών ιδεωδών είναι επίσης μηδενοδύναμο.

Αποδ. Έστω I, J μηδενοδύναμα. Θ.δ.ο. $I+J$ μηδενοδύναμο
(η γενική απόδειξη προκύπτει με επαγωγή)
Αν $I^n = 0$ και $J^m = 0$, τότε $I^N = 0 = J^N$ για $N = \max\{m,n\}$
Έστω $a_1, a_2, \dots, a_{2N} \in I$ και $b_1, b_2, \dots, b_{2N} \in J$
Τότε $(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_{2N}+b_{2N})$
είναι άθροισμα όρων όπου ο καθένας έχει τουλάχιστον N παράγοντες από το I ή από το J, οπότε ανήκει στο I^N ή στο J^N.

Π.χ. έστω $N=3$

$$\underbrace{a_1 b_2}_{\in J}\ \underbrace{a_3 b_4}_{\in J}\ \underbrace{a_5 b_6}_{\in J}, \quad \underbrace{a_1}_{\in I}\ \underbrace{a_2}_{\in I}\ \underbrace{a_3}_{\in I}\ \underbrace{b_4 b_5 a_6}_{\in I},$$

$$\underbrace{a_1 a_2 a_3 b_4}_{\in J}\ \underbrace{b_5}_{\in J}\ \underbrace{b_6}_{\in J}, \quad \underbrace{b_1}_{J}\ \underbrace{b_2}_{J}\ \underbrace{a_3 a_4 b_5}_{J}\ a_6$$

Άρα $(I+J)^{2N} = 0$

Λήμμα: Αν ένα αριστερό (αντ. δεξιό) ιδεώδες $I \subseteq R$ είναι nil, τότε $I \subseteq J(R)$

Αποδ Αν $y \in I$, τότε xy μηδενοδύναμο $\forall\, x \in R$.

Άρα $\exists\, n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $(xy)^n = 0$.

Έστω $u = \sum_{i=0}^{n-1} (xy)^i$

Τότε $u \cdot (1-xy) = \sum_{i=0}^{n-1}(xy)^i - \sum_{i=1}^{n}(xy)^i = (xy)^0 = 1$

Άρα το $1-xy$ είναι αριστερά αντιστρέψιμο $\forall\, x \in R$

Λήμμα $J \Rightarrow y \in J(R)$

Θεώρημα: Έστω R αριστερός του Artin. Τότε $J(R)$ είναι το μεγαλύτερο μηδενοδύναμο αριστερό ιδεώδες και ταυτόχρονα το μεγαλύτερο μηδενοδύναμο δεξιό ιδεώδες του R.

Αποδ. Αρκεί ν.δ.ο. $J(R)$ μηδενοδύναμο (λόγω προηγούμενου λήμματος)

Έστω η αλυσίδα $J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \dots$, όπου $J = J(R)$

Λόγω ΣΦΑ. $\exists\, k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $J^k = J^{k+1} = \dots$

Θ.δ.ο. $J^k = 0$. Έστω $J^k \neq 0$.

Έστω $S = \{ I \text{ ιδεώδες αριστερό} \mid J^k I \neq 0 \}$

$S \neq \emptyset$, άρα υπάρχει ελαχιστικό στοιχείο I_0 (αφού R Artin)

Έστω $a \in I_0$ με $J^k a \neq 0$

Τότε $J^k(J^k a) = J^{2k} a = J^k a \neq 0$

Οποτε, λογω ελαχιστικοτητος του I_0, $J^k a = I_0$.

Οποτε $a = ya$ για κάποιο $y \in J^k \subseteq J$.

Ομως $(1-y)a = 0 \Rightarrow a = 0$ αφού $1-y \in R^\times$: ΑΤΟΠΟ

Αρα $J^k = 0$.

<u>Πόρισμα</u>: Έστω R αριστερός του Artin.

Τότε nil $\Rightarrow$ nilpotent.

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Στη θεωρία δακτυλίων, υπάρχουν και άλλα παρόμοια αποτελέσματα « nil $\Rightarrow$ nilpotent »
- Αν R μεταθετικός και $x \in R$ μηδενοδύναμο στοιχείο, τότε $x \in J(R)$ (αφού (x) nil). Δεν ισχύει αυτό γενικά (Άσκηση)

<u>Θεώρημα</u>: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) R ημιαπλός

(2) R J-ημιαπλός και αριστερός του Artin

(3) R J-ημιαπλος και ικανοποιεί $\underbrace{\text{ΣΦΑ στα } \underline{\text{κύρια}} \text{ αριστερά ιδεώδη}}_{\text{δεξιά τέλειος δακτύλιος}}$

<u>Αποδ.</u> (1) $\Rightarrow$ (2)

R ημιαπλος $\Rightarrow \exists$ αριστερό ιδεώδες I τ.ώ. $R = J(R) \oplus I$.

Αρα $1 = e + f$, με $e^2 = e$, $f^2 = f$, $J(R) = Re$, $I = Rf$, $ef = 0 = fe$

Ομως $1 - e \in R^{\times}$, άρα $\left.\begin{array}{l} f \in R^{\times} \\ f = f^2 \end{array}\right\} \Rightarrow f = 1 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow J(R) = 0$

Εχουμε ήδη δει ότι R ημιαπλος $\Rightarrow$ R αριστερος του Artin

(2) $\Rightarrow$ (3)

Τετριμμένο

(3) $\Rightarrow$ (1)

Ισχυρισμός 1:

Κάθε αριστερό ιδεώδες $I \neq 0$ περιέχει ένα ελάχιστικό αριστερό ιδεώδες

Αποδ. ΣΦΑ στα κύρια ιδεώδη $\Rightarrow$ Κάθε μη κενό σύνολο αριστερών κυρίων ιδεωδών περιέχει ελαχιστικο στοιχείο

Αν πάρουμε το σύνολο των αριστερών κυρίων ιδεωδών $\neq 0$, που περιέχονται στο I, το ελαχιστικό στοιχείο I_0 είναι και ελαχιστικό ιδεώδες (αν $J \subseteq I_0$ και $a \in J, a \neq 0$ τότε $Ra \subseteq I_0 \Rightarrow Ra = J = I_0$)

Ισχυρισμος 2

Κάθε ελαχιστικό αριστερο ιδεώδες I είναι ευθύς προσθετέος του ${}_RR$.

Αποδ $J(R) = 0$

Αν $I \neq 0$, τότε $I \neq J(R)$ και άρα υπάρχει μεγιστικό αριστερό ιδεώδες m του R που δεν περιέχει το I. Οπότε $I \cap m \neq I$.

Αφού I ελαχιστικό, $I \cap m = 0$ και, αφού m μεγιστικό, ${}_RR = I \oplus m$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο R δεν είναι ημιαπλός. Έστω I_1 ένα ελαχιστικό ιδεώδες του R. Έστω J_1 τ.ώ. $I_1 \oplus J_1 = {}_R R$.
(αφού R όχι ημιαπλός)
Τότε $J_1 \neq 0$ και άρα το J_1 περιέχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες I_2. Υπάρχει αριστερό ιδεώδες J_2 τ.ώ. $I_2 \oplus J_2 = J_1$
(αφού $\exists$ J_2' τ.ω. $I_2 \oplus J_2' = {}_R R$, παίρνουμε $J_2 = J_2' \cap J_1$)
Συνεχίζοντας έτσι κατασκευάζουμε $J_1 \supsetneq J_2 \supsetneq J_3 \supsetneq \dots$
Έχουμε ${}_R R = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_k \oplus J_k \quad \forall\, k \geqslant 1$
Αν $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_k + f_k$ με $e_j \in I_j$ και $f_k \in J_k$
τότε $r = re_1 + re_2 + \dots + re_k + rf_k \quad \forall\, r \in R$
Αν $r \in J_k$ τότε $re_j = 0 \ \forall\, j = 1, \dots, k$ και $rf_k = r$.
Άρα $J_k = (f_k)$ κύριο αριστερό ιδεώδες.
Όμως ο R ικανοποιεί ΣΦΑ στα κύρια αριστερά ιδεώδη: ΑΤΟΠΟ
Άρα ο R είναι ημιαπλός

Παραδείγματα:

- $R = \mathbb{Z}$. Αν $x \in J(R)$, τότε $x \in (p)$ $\forall$ πρώτο αριθμό p
  Άρα $x = 0$ και το $\mathbb{Z}$ είναι J-ημιαπλός
  Δεν είναι όμως αριστερός του Artin, άρα ούτε ημιαπλός
  (Αν I, J μη μηδενικά ιδεώδη του $\mathbb{Z}$, τότε $I \cap J \neq \{0\}$)

- R απλός $\Rightarrow$ R J-ημιαπλός (αφού $J(R) \subsetneq R$ ιδεώδες)

(semiprimary)

Ορισμός: Ένας δακτύλιος R λέγεται ημιπρωταρχικός αν
$J(R)$ είναι μηδενοδύναμο και $R/J(R)$ είναι ημιαπλός

Παράδειγμα: R Artin $\Rightarrow$ R ημιπρωταρχικός
(αφού $J(R)$ μηδενοδύναμο και $R/J(R)$ Artin + J-ημιαπλός)

Θεώρημα (Hopkins-Levitzki 1939, Akizuki 1935 για μεταθετικούς)
Έστω R ένας ημιπρωταρχικός δακτύλιος και M ένα R-πρότυπο.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(1) M Noether
(2) M Artin
(3) M έχει πεπερασμένη σειρά σύνθεσης

Αποδ. Έχουμε δει ότι $(3) \Rightarrow (1)$ και $(3) \Rightarrow (2)$
Άρα αρκεί ν.δ.ό. $(1) \Rightarrow (3)$ και $(2) \Rightarrow (3)$
Έστω ότι M είναι Noether (ή Artin) και $J^n = 0$ όπου $J = J(R)$
Θεωρούμε την αλυσίδα

$$M \supseteq JM \supseteq J^2M \supseteq \dots \supseteq J^nM = 0$$

Αν το $J^iM/J^{i+1}M$ έχει σειρά σύνθεσης τότε υπάρχουν
$J^{i+1}M = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \dots \subsetneq N_{k-1} \subsetneq N_k = J^iM$ τ.ω.
$N_t/N_{t-1} \cong N_t/J^{i+1}M \big/ N_{t-1}/J^{i+1}M$ απλό
Αν αυτό ισχύει για κάθε i, τότε το M έχει σειρά σύνθεσης

M Noether (ή Artin) $\Rightarrow J^iM/J^{i+1}M$ Noether (ή Artin)

Το $J^iM/J^{i+1}M$ είναι R/J-πρότυπο

(Υπενθύμιση: M/IM είναι R/I-πρότυπο $\forall$ ιδεώδες I του R)

R/J ημιαπλός $\Rightarrow J^iM/J^{i+1}M$ ημιαπλό

$\Rightarrow J^iM/J^{i+1}M$ ευθύ άθροισμα απλών προτύπων

Λόγω ΣΑΑ (ή ΣΦΑ) το άθροισμα αυτό είναι πεπερασμένο

Έχουμε δει ότι οποιοδήποτε πεπερασμένο ευθύ άθροισμα απλών προτύπων έχει σειρά σύνθεσης (βλ. παρατήρηση μετά από το Jordan-Hölder)

<u>Πόρισμα 1:</u>

R αριστερός Artin $\Leftrightarrow R$ αριστερός Noether + ημιπρωταρχικός

<u>Πόρισμα 2:</u>

R αριστερός Artin $\Rightarrow$ Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο έχει σειρά σύνθεσης

Λήμμα του Nakayama:

Για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R, Τ.Α.Ε.Ι. :

(1) $I \subseteq J(R)$

(2) Αν M πεπ. παραγ R-πρότυπο και $IM = M$, τότε $M = 0$

(3) Αν M/N πεπ. παραγ. R-πρότυπο και $N + IM = M$, τότε $N = M$

Αποδ. (1) $\Rightarrow$ (2)

Εστω $I \subseteq J(R)$ και $M \neq 0$

Αφού M πεπ παραγ $\exists$ μεγιστικό R-υποπρότυπο M'

(Λήμμα του Zorn)

Τοτε M/M' απλό και αρα $I \cdot (M/M') = 0$, δηλ. $IM \subseteq M'$

Ειδικότερα $IM \neq M$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

$I(M/N) = (N + IM)/N = M/N \Rightarrow M/N = 0 \Rightarrow M = N$

(3) $\Rightarrow$ (1)

Έστω $y \in I$, με $y \notin J(R)$

Τότε υπάρχει μεγιστικό αριστερό ιδεώδες $\mathfrak{m}$ τ.ω. $y \notin \mathfrak{m}$.

Έχουμε $\mathfrak{m} + I = R$, αφού $\mathfrak{m}$ μεγιστικό και $I \not\subseteq \mathfrak{m}$

Επίσης, αφού $I \subseteq IR$, έχουμε $\mathfrak{m} + IR = R$

Το $R/\mathfrak{m}$ είναι πεπ. παραγ. R-πρότυπο, γιατί $R/\mathfrak{m} = (1_R + \mathfrak{m})$

Από την υπόθεση, $\mathfrak{m} = R$: Άτοπο

Άρα $I \subseteq J(R)$