Φυλλάδιο 7

Άσκηση 4

$\mathcal{F}(G,k) = \{ F : G \longrightarrow k \text{ συνάρτηση} \}$

$\mathcal{F}(G/\sim, k) = \{ F \in \mathcal{F}(G,k) \mid F(hgh^{-1}) = F(g) \ \forall g,h \in G \}$

↑ κεντρικές συναρτήσεις

Έστω $F, F' \in \mathcal{F}(G,k)$ και $\lambda \in k$

$(F+F')(g) = F(g) + F'(g)$

$(F \cdot F')(g) = F(g) \cdot F'(g)$

$(\lambda \cdot F)(g) = \lambda \cdot F(g)$

$1_{\mathcal{F}(G,k)} : G \longrightarrow k, \ g \longmapsto 1$

i) Έστω $\tilde{\sigma} : G \longrightarrow G, \ g \longmapsto g^{-1}$. Τότε $\tilde{\sigma}$ 1-1 και επί

Έχουμε $\sigma(F) = F \circ \tilde{\sigma}$

$\sigma(F_1 + F_2) = (F_1 + F_2) \circ \tilde{\sigma} = F_1 \circ \tilde{\sigma} + F_2 \circ \tilde{\sigma} = \sigma(F_1) + \sigma(F_2)$

$\sigma(\lambda \cdot F) = (\lambda F) \circ \tilde{\sigma} = \lambda \cdot (F \circ \tilde{\sigma}) = \lambda \cdot \sigma(F)$

Άρα σ γραμμική

$\tilde{\sigma}^2 = id_G \Rightarrow \sigma^2 = id_{\mathcal{F}(G,k)} \Rightarrow \sigma$ 1-1 και επί

Επίσης $\sigma(F_1 \cdot F_2) = (F_1 \cdot F_2) \circ \tilde{\sigma} = (F_1 \circ \tilde{\sigma}) \cdot (F_2 \circ \tilde{\sigma}) = \sigma(F_1)\sigma(F_2)$

και $\sigma(1_{\mathcal{F}(G,k)}) = 1_{\mathcal{F}(G,k)} \circ \tilde{\sigma} = 1_{\mathcal{F}(G,k)}$

Άρα σ ομομορφισμός δακτυλίων

Τέλος αν $F(hgh^{-1}) = F(g) \ \forall g,h \in G$

τότε $\sigma(F)(hgh^{-1}) = F(hg^{-1}h^{-1}) = F(g^{-1}) = \sigma(F)(g) \ \forall g,h \in G$

ii) Οι χαρακτήρες είναι κεντρικές συναρτήσεις.

$1_{\mathcal{F}(G,k)} : G \longrightarrow k,\ g \longmapsto 1 = \chi_{triv} = \chi_k$

$\chi_V \cdot \chi_W = \chi_{V\otimes W}$

$\sigma(\chi_V)(g) = \chi_V(g^{-1}) = \chi_{triv}(g)\chi_V(g^{-1}) = \chi_{V^*}(g)$

$\Rightarrow \sigma(\chi_V) = \chi_{V^*}$

iii) Η διγραμμικότητα είναι εύκολη

Το ίδιο και η συμμετρικότητα

(αφού το άθροισμα διατρέχει όλα τα στοιχεία της G)

Ας δείξουμε ότι είναι μη εκφυλισμένη

Έστω $F \in \mathcal{F}(G,k)$, $F \neq 0$

Θέτουμε $F' : G \longrightarrow k,\ g \longmapsto \begin{cases} F(g^{-1})^{-1} & \text{αν } F(g^{-1}) \neq 0 \\ 0 & \text{αν } F(g^{-1}) = 0 \end{cases}$

Έχουμε $\langle F, F' \rangle = \dfrac{1}{|G|} \sum_{\substack{g\in G \\ F(g)\neq 0}} F(g)F(g)^{-1} = \dfrac{\#\{g\in G \mid F(g)\neq 0\}}{|G|} \neq 0$

Αν $F \in \mathcal{F}(G/\sim, k)$, τότε $\forall\, g,h \in G$ $F(hg^{-1}h^{-1}) = F(g^{-1})$

οπότε

$F'(hgh^{-1}) = F(hg^{-1}h^{-1})^{-1} = F(g^{-1})^{-1} = F'(g)$ αν $F(g^{-1}) \neq 0$

και

$F'(hgh^{-1}) = 0 = F'(g)$ αν $F(g^{-1}) = 0$

Άρα $F' \in \mathcal{F}(G/\sim, k)$

<u>Παρατήρηση:</u> $\dim_k \mathcal{F}(G/\sim, k) = \#$ κλάσεις συζυγίας της G

C κλάση συζυγίας, $\psi_C : G \to k$, $g \mapsto \begin{cases} 1 & \text{αν } g \in C \\ 0 & \text{αν } g \notin C \end{cases}$

τότε οποιαδήποτε $f \in \mathcal{F}(G,k)$ γράφεται ως $\sum\limits_{C \in \underbrace{Cl(G)}_{\text{σύνολο κλάσεων συζυγίας της } G}} \lambda_C \psi_C$, $\lambda_C \in k$

<u>Παραδείγματα:</u>

- $\chi^{reg}(g) = \begin{cases} |G| \cdot 1_k & \text{αν } g = 1 \\ 0 & \text{αν } g \neq 1 \end{cases}$

  $\langle \chi^{reg}, \chi_V \rangle = \frac{1}{|G|} \chi^{reg}(1) \cdot \chi_V(1) = \dim_k V \cdot 1_k$

- $k = \mathbb{C}$

  $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_V(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_V(g)} \geqslant 0$

(Εσωτερικό γινόμενο)

Υπενθύμιση από τη Γραμμική Άλγεβρα

Ξέρουμε ότι αν $W \subseteq V$ διαν. χώροι, τότε $\exists\ W' \subseteq V$ υπόχωρος τ.ω. $V = W \oplus W'$. Αυτό δεν ισχύει σε πρότυπα (μόνο ημιαπλά)

$p_W : V \longrightarrow W$ προβολή με $p_W^2 = p_W$, $\operatorname{Ker} p_W = W'$, $\operatorname{Im} p_W = W$

$w \oplus w' \longmapsto w$

Αντίστροφα, αν έχουμε $p : V \longrightarrow V$ με $p^2 = p$ γραμμική τότε $V = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$

Αυτό ισχύει σε πρότυπα

Επιστροφή στη Θεωρία Αναπαραστάσεων

Έστω (V, ρ) μια αναπαράσταση της G

Ορίζουμε $p_V : V \longrightarrow V$, δηλ. $p_V = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \in \operatorname{End}_k(V)$

$$v \longmapsto \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \rho(g)(v)$$

Έχουμε $p_V \in \operatorname{End}_{kG}(V)$, γιατί για κάθε $h \in G$

$$p_V(hv) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\rho(h)(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(gh)(v) = p_V(v)$$

Από την άλλη

$$h \cdot p_V(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(h)\rho(g)(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg)(v) = p_V(v)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} G \xrightarrow{\text{αντιστοιχία}} G \\ g \longmapsto g \cdot h \end{array}}$$

Επίσης έχουμε $\operatorname{Im} p_V = V^G = \{ v \in V \mid g \cdot v = v \ \forall g \in G \}$
γιατί αν $v \in V^G$, τότε $p_V(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \cdot v = \frac{1}{|G|} \cdot |G| \cdot v = v$
οπότε $v \in \operatorname{Im} p_V$
Από την άλλη, είδαμε ότι $h \cdot p_V(v) = p_V(v) \ \forall h \in G, \forall v \in V$
οπότε $\operatorname{Im} p_V \subseteq V^G$.

Τέλος $p_V(\underbrace{p_V(v)}_{\substack{\in \\ \operatorname{Im} p_V \\ \| \\ V^G}}) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \rho(g)(p_V(v)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p_V(v) = p_V(v)$

οπότε $p_V^2 = p_V$

Άρα $V = \operatorname{Ker} p_V \oplus \operatorname{Im} p_V$ ως kG-πρότυπα
$= \operatorname{Ker} p_V \oplus V^G$

$\operatorname{Tr} p_V = \dim_k \operatorname{Im} p_V \cdot 1_k = \dim_k V^G \cdot 1_k$

$\operatorname{Tr} p_V = \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{Tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$

$= \langle \chi_V, \chi_k \rangle$

Γενικότερα, αν V, W αναπαραστάσεις, τότε

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)\chi_W(g^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathrm{Hom}_k(W,V)}(g)$$

$$= \mathrm{Tr}\, p_{\mathrm{Hom}_k(W,V)}$$

$$= \dim_k \mathrm{Hom}_k(W,V)^G \cdot 1_k$$

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \langle \chi_W, \chi_V \rangle = \dots = \dim_k \mathrm{Hom}_k(V,W)^G \cdot 1_k$$

<u>Λήμμα:</u> $\mathrm{Hom}_k(V,W)^G = \mathrm{Hom}_{kG}(V,W)$

<u>Αποδ.</u> $f \in \mathrm{Hom}_k(V,W)^G \iff \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) = f \quad \forall g \in G$

$f \in \mathrm{Hom}_{kG}(V,W) \iff \rho_W(g) \circ f = f \circ \rho_V(g) \quad \forall g \in G$

Αφού $\rho_V(g^{-1}) = \rho_V(g)^{-1}$, ισχύει το ζητούμενο

<u>Πρόταση:</u> $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \dim_k \mathrm{Hom}_{kG}(V,W) \cdot 1_k$

$$= \dim_k \mathrm{Hom}_{kG}(W,V) \cdot 1_k$$

Σχέσεις ορθογωνιότητας χαρακτήρων

V, W ανάγωγες αναπαραστάσεις

Τότε $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 0 & \text{αν } V \not\cong W \\ \dim_k \mathrm{End}_{kG}(V) \cdot 1_k & \text{αν } V \cong W \end{cases}$

Αν k αλγ. κλειστό (π.χ. $k = \mathbb{C}$), το τελευταίο είναι ίσο με 1

χαρ$k \neq 0$ — " — $\neq 0$

Πόρισμα: V, W ανάγωγες αναπαραστάσεις. Αν k αλγ. κλειστό ή χαρ$k = 0$, τότε: $\chi_V = \chi_W \Rightarrow V \cong W$

Αποδ. $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_W(g^{-1})$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_V(g^{-1}) \neq 0 \Rightarrow V \cong W$$