Φυλλάδιο 6

Α1] Αν R μεταθετικός, $x \in R$ μηδενοδύναμο

Τοτε υπαρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω $x^n = 0$

Για κάθε $a \in R$ ισχύει $(ax)^n = a^n x^n = 0$

Αρα (x) nil $\Rightarrow (x) \subseteq J(R) \Rightarrow x \in J(R)$

Αν $R = M_2(\mathbb{R})$ τότε $J(R) = 0$ αλλα $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Α2] "$\supseteq$" Αρκεί ν.δ.ο. $\forall a \in J(R)$ $aE_{ij} \in J(M_n(R))$

δηλ. ότι $N = I_n - MaE_{ij}$ είναι αντιστρέψιμος $\forall M \in M_n(R)$

$M = \sum_{1 \leq k,l \leq n} m_{kl} E_{kl} \rightsquigarrow N = I_n - \sum_{k=1}^{n} m_{ki} a E_{kj} = I - m_{ji} a E_{jj} - \sum_{k \neq j} m_{ki} a E_{kj}$

Αφού $a \in J(R)$, $\exists (1 - m_{ji} a)^{-1} = 1 - b$ για κάποιο $b \in R$

Τότε $(I_n - bE_{jj})(I_n - m_{ji} a E_{jj}) = I$, όποτε

$(I_n - bE_{jj}) N = I_n - (I_n - bE_{jj}) \sum_{k \neq j} m_{ki} a E_{kj} = I_n - \sum_{k \neq j} m_{ki} a E_{kj}$

Τώρα,

$(I_n - \sum_{k \neq j} m_{ki} a E_{kj})(I_n + \sum_{k \neq j} m_{ki} a E_{kj}) = I_n$, οποτε N αντιστρέψιμος

"$\subseteq$"

Ασκηση 3 Φ 1 $\Rightarrow \exists J$ ιδεώδες του R τ.ω. $J(M_n(R)) = M_n(J)$

Αν $a \in J$, τότε $aI_n \in J(M_n(R))$, οποτε $I_n - baI_n = (1-ba) I_n$

είναι αντιστρέψιμος $\forall b \in R$. Αρα $1 - ba$ είναι αντιστρέψιμο,

οποτε $a \in J(R)$. Εχουμε $J \subseteq J(R)$, οποτε

$J(M_n(R)) = M_n(J) \subseteq M_n(J(R))$.

A3] Αν $S := R^\times \cup \{0\}$ είναι δαυτύλιος διαίρεσης, τότε $S \cap J(R)$ είναι ιδεώδες του S και άρα 0. Έστω $y \in J(R)$. Τότε

$1+y \in R^\times \subseteq S \Rightarrow y \in S \cap J(R) = \{0\}$.

Άρα R J-ημιαπλός

A4] Έστω $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $I^n = 0$

Αν $f(x) \in I[X]$. Τότε κάθε συντελεστής του $(f(x))^n$ είναι γινόμενο n στοιχείων του I και άρα μηδέν

$f(x)$ μηδενοδύναμο $\underset{A1}{\Longrightarrow} f(x) \in J(R[X])$

Έστω $a \in R \cap J(R[X])$

Τότε $1 - af(x)$ αντιστρέψιμο $\forall f(x) \in R[X]$

$\Longrightarrow 1 - ax$ αντιστρέψιμο

$\overset{*}{\Longrightarrow}$ a μηδενοδύναμο

Άρα $R \cap J(R[X])$ nil ιδεώδες

* Ένα πολυώνυμο $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in R[X]$ είναι αντιστρέψιμο ανν $a_0 \in R^\times$ και a_i μηδενοδύναμο $\forall i \geq 1$
(γιατί $f(x)g(x) = 1$ στο $R[X] \Rightarrow \overline{f(x)}\,\overline{g(x)} = 1$ στο $R/P[X]$ για κάθε πρώτο ιδεώδες P του R, οπότε για κάθε $i \geq 1$ $a_i \in \bigcap_{P \text{ πρώτο}} P = \sqrt{0} = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ τ.ω. } x^n = 0\}$)

Φυλλάδιο 7

Α1] $S_3 = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^3 = 1 \rangle$

i) Αρκεί ν.δ.ό. $\rho(s_1)^2 = \rho(s_2)^2 = (\rho(s_1)\rho(s_2))^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

iii) $\nexists\ P$ τ.ω. $P^{-1}\rho_2(s_1)P = P^{-1}\rho_2(s_2)P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$(\mathbb{C}^2, \rho_1) \not\cong (\mathbb{C}^2, \rho_2)$

$\rho_2(s_1 s_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_2(s_1 s_2) = -1$

$\#$

$\rho_1(s_1 s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_1(s_1 s_2) = 2$

iv) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\mathbb{C}^2, \rho_1) = (\mathbb{C}, \mathrm{sgn}) \oplus (\mathbb{C}, \mathrm{triv})$

Ας κατασκευάσουμε την αναπαράσταση της S_3

Έστω $V = \mathbb{C}^3$ με την standard αναπαράσταση της S_3

$$\sigma^{-1} \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$

Τότε $V^{S_3} = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = y = z\} = \langle (1,1,1) \rangle$

Έστω $W = (V^{S_3})^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x+y+z = 0\}$

Έχουμε $W = \langle \overset{\varepsilon_1}{\overset{\shortparallel}{(1,-1,0)}}, \overset{\varepsilon_2}{\overset{\shortparallel}{(0,1,-1)}} \rangle$

Αφού $S_3 = \langle \overset{s_1}{\overset{\shortparallel}{(1\ 2)}}, \overset{s_2}{\overset{\shortparallel}{(2\ 3)}} \rangle$ αρκεί να ορίσουμε την $\rho(s_1)$ και $\rho(s_2)$

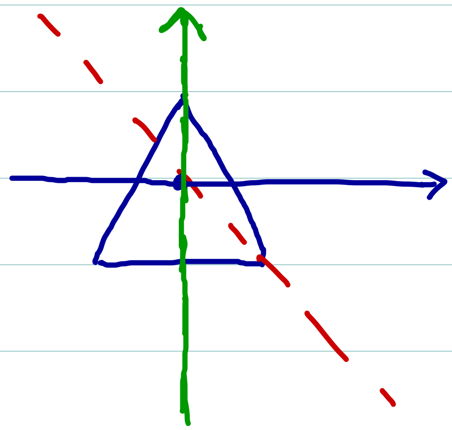
$$\left.\begin{aligned} s_1 \cdot \varepsilon_1 &= -\varepsilon_1 \\ s_1 \cdot \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\rho(s_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\chi(s_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} s_2 \cdot \varepsilon_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ s_2 \cdot \varepsilon_2 &= -\varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\rho(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\chi(s_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\rho(s_1^2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi(1) = 2$$

$$\rho(s_1 s_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi(s_1 s_2) = -1$$

S_3 = ομαδα συμμετριας του ισόπλευρου τριγώνου



$e_1 = (1,0) \qquad e_2 = (0,1) \qquad W' = \mathbb{R}^2$

$$s_1 \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ \sin\pi & -\cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_2 \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{3} & \sin\frac{5\pi}{3} \\ \sin\frac{5\pi}{3} & -\cos\frac{5\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$\chi(s_1) = 0 \qquad \chi(s_2) = 0$

Εχουμε $(V,\rho) = V^{S_3} \oplus W$

$= V_{triv} \oplus W$

αφού $\sigma\cdot(1,1,1) = (1,1,1)\ \forall\ \sigma \in S_3$

Η S_3 έχει 3 αναγωγες αναπαραστάσεις διάστασης $1,1,2$

αφού $1^2+1^2+2^2=6$, αυτές είναι όλες οι ανάγωγες

αναπαραστάσεις Έχουμε $\mathbb{C}S_3 \cong \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times M_2(\mathbb{C})$

<u>A2]</u> Κάθε μετάθεση είναι γινομενο αντιμεταθέσεων

Όλες οι αντιμεταθέσεις είναι συζυγείς.

Οπότε αν σ,τ αντιμεταθέσεις τότε $\rho(\sigma)=\rho(\tau)$

$$(\rho(\sigma))^2 = \rho(\sigma^2) = \rho(1) = 1 \Rightarrow \rho(\sigma) = \begin{cases} 1 \rightsquigarrow triv \\ -1 \rightsquigarrow sgn \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Στην S_3, για $\chi_1=\chi_{triv}$, $\chi_2=\chi_{sgn}$, $\chi_3=\chi_W$

Ξερουμε ότι οι δυνατότητες για αναπαραστάσεις διάστασης 2 είναι:

$2\chi_1,\ 2\chi_2,\ \chi_1+\chi_2,\ \chi_3$

$2\chi_1(s_1) = 2$	$2\chi_1(s_1s_2) = 2$
$2\chi_2(s_1) = -2$	$2\chi_2(s_1s_2) = 2$
$\chi_1+\chi_2(s_1) = 0$	$\chi_1+\chi_2(s_1s_2) = 2$
$\chi_3(s_1) = 0$	$\chi_3(s_1s_2) = -1$
Δεν ξεχωρίζει.	Ξεχωρίζει

A3 $\rho : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$

$$g \longmapsto \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$$

$$\begin{aligned}
\rho(gh)(v_1, v_2) &= (\rho_1(gh)(v_1), \rho_2(gh)(v_2)) \\
&= (\rho_1(g)\circ\rho_1(h)(v_1), \rho_2(g)\circ\rho_2(h)(v_2)) \\
&= \rho(g)(\rho_1(h)(v_1), \rho_2(h)(v_2)) \\
&= \rho(g)\circ\rho(h)(v_1, v_2)
\end{aligned}$$

$$\chi(g) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(\rho_1(g)) + \mathrm{Tr}(\rho_2(g)) = \chi_1(g) + \chi_2(g)$$

$\rho : G \longrightarrow GL(\mathrm{Hom}_k(V_1, V_2))$

$$g \longmapsto (f \mapsto \rho_2(g)\circ f \circ \rho_1(g^{-1}))$$

$$\begin{aligned}
\rho(gh)(f) &= \rho_2(gh)\circ f\circ \rho_1((gh)^{-1}) = \\
&= \rho_2(g)\circ\rho_2(h)\circ f \circ \rho_1(h^{-1})\circ\rho_2(g^{-1}) \\
&= \rho(g)(\rho_2(h)\circ f\circ\rho_1(h^{-1})) \\
&= \rho(g)\circ\rho(h)(f)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Hom}_k(V_1, V_2) \cong V_1^* \otimes V_2$$

$\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$, $\mathrm{Hom}_k(V_1, V_2) \cong \mathrm{Mat}_{m\times n}(k)$

Έστω $\rho_2(g) = A \quad \rho_1(g^{-1}) = B$

Τότε

$$A E_{ij} B = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{γραμμη } i$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1i}b_{j1} & a_{1i}b_{j2} & \cdots & a_{1i}b_{jn} \\ a_{2i}b_{j1} & a_{2i}b_{j2} & & a_{2i}b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mi}b_{j1} & a_{mi}b_{j2} & & a_{mi}b_{jn} \end{pmatrix} = a_{ii}b_{jj}E_{ij} + \cdots$$

Άρα $\chi(g) = Tr(\rho(g)) = \sum_{i,j} a_{ii}b_{jj} = \chi_2(g)\chi_1(g^{-1})$

<u>Ορισμός</u>: Θα λέμε ότι μια αναπαράσταση είναι <u>πιστή</u>
αν ο ομομορφισμός $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ είναι 1-1 ($\Leftrightarrow \ker\rho = \{1\}$)

<u>Παράδειγμα</u> $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $V = \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbb{C}$ με $\zeta^n = 1$

Αν ζ είναι πρωταρχική ρίζα της μονάδας, τότε
$\rho: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow GL(\mathbb{C})$, $\bar{a} \longmapsto \zeta^a$ είναι 1-1
γιατί αν $\bar{a} \in \ker\rho$, τότε $\zeta^a = 1$, οπότε $a \equiv 0 \bmod n$, δηλ. $\bar{a} = \bar{0}$.
Αν ζ δεν είναι πρωταρχική ρίζα της μονάδας αυτό δεν ισχύει
<u>Π.χ.</u> Η τετριμμένη αναπαράσταση δεν είναι πιστή αν $G \neq \{1\}$

<u>Παρατήρηση</u>:
Θυμίζουμε ότι ένα πρότυπο είναι πιστό αν ο μηδενιστής του είναι 0
Αν V είναι πιστό kG-πρότυπο και $g \in \ker\rho$, τότε
$g \cdot v = v \ \forall v \in V \Rightarrow (g-1)\cdot v = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow$
$g - 1 \in \mathrm{Ann}_{kG}(V) \Rightarrow g = 1$
Άρα η αντίστοιχη αναπαράσταση είναι πιστή.
ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ.
<u>Π.χ.</u> Θεωρήστε την αναπαράσταση $\rho: S_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$
$\sigma \longmapsto$ Πίνακας μετάθεσης

Η αναπαράσταση αυτή είναι προφανώς πιστή.
<u>Ωστόσο</u> $\dim_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) = n^2$ ενώ $|\mathrm{Im}\rho| = |S_n| = n!$
Οπότε για $n \geqslant 4$, τα $\rho(\sigma)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και μπορούμε
να βρούμε $\lambda_\sigma \in \mathbb{C}$ όχι όλα $= 0$ τ.ώ. $\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \rho(\sigma) = 0 \in \mathrm{Ann}_{kG}(V)$