

Από εδώ και στο εξής $k = \mathbb{C}$

$$\text{Irr}(\mathbb{C}G) = \{ \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_t \}$$

Σχέσεις ορθογωνιότητας χαρακτήρων :

$$\langle \chi_{\nu_i}, \chi_{\nu_j} \rangle = \delta_{ij}$$

Αν $V = \bigoplus n_i V_i$, V_i ανάγωγες αναπαραστάσεις

$$\text{τότε } \langle \chi_V, \chi_{\nu_i} \rangle = n_i$$

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum n_i^2$$

Έχουμε δει ήδη ότι $\langle \chi_{V^{\text{reg}}}, \chi_V \rangle = \dim V = \chi_V(1)$

οπότε αν $V^{\text{reg}} = \bigoplus_{\substack{\text{ } \\ \mathbb{C}G}} n_i V_i$ τότε $n_i = \dim V_i$

Οπότε $\mathbb{C}G \cong \prod_{i=1}^m \text{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$ όπου $n_i = \dim V_i$

$$\text{Επίσης } |G| = \dim V^{\text{reg}} = \langle \chi_{V^{\text{reg}}}, \chi_{V^{\text{reg}}} \rangle = \sum_{i=1}^m n_i^2$$

Εφαρμογή: Αν $|G| \leq 4$, τότε όλες οι ανάγωγες αναπαραστάσεις είναι
διάστασης 1

Εστω $\text{Char } G = \langle \chi : G \rightarrow k \mid \chi \text{ χαρακτήρας} \rangle \leq \mathcal{F}(G, \mathbb{C}) / \sim$

Τότε $\text{Char } G = \langle \chi_{v_i} \mid 1 \leq i \leq t \rangle$

Αν $\sum \eta_i \chi_{v_i} = 0$, τότε $\langle \sum \eta_i \chi_{v_i}, \chi_{v_i} \rangle = \eta_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, t$

Αρα το σύνολο των ανάγωγων χαρακτήρων αποτελεί

(ορδουανονική) βάση του $\text{Char } G$

Εχουμε δει ότι $\langle \chi_v, \chi_w \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$

Είδαμε την προηγούμενη φορά ότι αν V, W ανάγωγοι

και $\chi_v = \chi_w$, τότε $V \cong W$

Πρόταση Αν $\chi_v = \chi_w$, τότε $V \cong W$

Αποδ. Αν $V = \sum n_i V_i$ και $W = \sum m_i V_i$, τότε

$$\chi_v = \sum n_i \chi_{v_i} \quad \text{και} \quad \chi_w = \sum m_i \chi_{v_i}$$

Αν $\chi_v = \chi_w$, τότε $\langle \chi_v, \chi_{v_i} \rangle = n_i = m_i = \langle \chi_w, \chi_{v_i} \rangle \quad \forall i$, οπότε $V \cong W$.

Πρόταση Αν $\langle \chi_v, \chi_v \rangle = 1$, τότε V ανάγωγη

Αποδ $V = \sum n_i V_i$, $\langle \chi_v, \chi_v \rangle = n_i^2 = 1 \Rightarrow V = V_i$ για κάποιο i

Θεώρημα : Το σύνολο $\{\chi_{v_i} \mid 1 \leq i \leq t\}$ είναι (ορδουανονική)

βάση του $\mathcal{F}(G, \mathbb{C}) / \sim = \{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f(hgh^{-1}) = f(g) \quad \forall g, h \in G \}$

Ορισμός: Αν (V, ρ_V) είναι μια αναπαράσταση της G και $f \in \mathbb{C}(G)/\sim$, θεωρούμε $\phi_V := \sum_{g \in G} f(g) \rho_V(g^{-1}) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$

Λήμμα 1: Αν $f \in \mathbb{C}(G)$ και $V \in \text{Irr}(\mathbb{C}G)$, τότε $\phi_V = \left(\frac{|G|}{\dim V} \langle f, \chi_V \rangle \right) \text{id}_V$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ανοδ. } \phi_V(\rho_V(h) \cdot u) &= \sum_{g \in G} f(g) \rho_V(g^{-1}h)(u) = \\
 &= \sum_{g \in G} f(hg) \rho_V(g^{-1})(u) \\
 &= \sum_{g \in G} f(gh) \rho_V(g^{-1})(u) \\
 &= \sum_{g \in G} f(g) \rho_V(hg^{-1})(u) \\
 &= \rho_V(h) \phi_V(u)
 \end{aligned}$$

$$\text{Αρα } \phi_V \in \text{End}_{\mathbb{C}G}(V) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ τω. } \phi = \lambda \cdot \text{id}_V$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Tr}(\phi_V) &= \sum_{g \in G} f(g) \chi_V(g^{-1}) = |G| \langle f, \chi_V \rangle \\
 \text{Tr}(\phi_V) &= \lambda \cdot \dim V
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{|G|}{\dim V} \langle f, \chi_V \rangle$$

Λήμμα 2: Αν $\langle \phi, \chi_v \rangle = 0 \quad \forall v \in \text{Irr}(\mathbb{C}G)$, τότε $\phi = 0$

Αποδ Έχουμε $\phi_v = 0 \quad \forall v \in \text{Irr}(\mathbb{C}G)$

$$\text{Επίσης } \phi_{v \oplus w} = \phi_v \oplus \phi_w$$

$$\text{Από } \phi_{v_{\text{reg}}} = 0 \Rightarrow \sum_{g \in G} \phi(g) g^{-1}h = 0 \quad \forall h \in G \Rightarrow \phi(g) = 0 \quad \forall g \in G$$

Αποδείξη θεωρήματος

$\text{Char } G \leq \mathbb{F}(G, \mathbb{C})/\sim$ υποχώρος

$$\mathbb{F}(G, \mathbb{C})/\sim = \text{Char } G \oplus \text{Char } G^\perp$$

$$\text{Αλλά } \text{Char } G^\perp = \{0\}$$

$$\Rightarrow \text{Char } G = \mathbb{F}(G, \mathbb{C})/\sim$$

Πόρισμα: $|\text{Irr}(\mathbb{C}G)| = \# \text{ κλάσεις συζυγίας της } G$

$$\text{Αποδ. } |\text{Irr}(\mathbb{C}G)| = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{F}(G, \mathbb{C})/\sim = \# \text{ κλάσεις συζυγίας της } G$$

Πρόταση : Έστω $g \in G$ και $C(g)$ η υψίστη συζυγίας του στην G .

Έστω $\text{Irr}(\mathbb{C}G) = \{\chi_1, \dots, \chi_t\}$

$$i) \sum_{i=1}^t \overline{\chi_i(g)} \chi_i(g) = \frac{|G|}{\#C(g)}$$

$$ii) \sum_{i=1}^t \overline{\chi_i(g)} \chi_i(h) = 0 \quad \forall h \in G \setminus C(g)$$

Απόδ Έστω $\phi = \psi_{C(g)} : G \rightarrow k$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in C(g) \\ 0 & \text{αν } x \notin C(g) \end{cases}$$

Αφού $\text{Irr}(\mathbb{C}G)$ είναι βάση του $\mathbb{F}(G, \mathbb{C})/\sim$, υπάρχουν $\eta_i \in \mathbb{C}$ τ.ω.

$$\phi = \sum_{i=1}^t \eta_i \chi_i$$

$$\mu \in \eta_i = \langle \phi, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi_{C(g)}(h) \overline{\chi_i(h)} = \frac{\#C(g)}{|G|} \overline{\chi_i(g)}$$

Οπότε, για κάθε $x \in G$, έχουμε

$$\phi(x) = \frac{\#C(g)}{|G|} \sum_{i=1}^t \overline{\chi_i(g)} \chi_i(x)$$

Αν $x = g$ παίρνουμε το i)

$x = h \notin C(g)$ παίρνουμε το ii)

Πινάκας Χαρακτήρων

$Cl(G) = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ κλάσεις συζυγίας της G

$Irr(\mathbb{C}G) = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_t\}$ ανάγωγοι χαρακτήρες

$$C_1 = \{1\}, \quad g_i \in C_i, \quad i=2, \dots, t$$

	C_1	C_2	C_3	$\dots$	C_t
χ_1	$\chi_1(1)$	$\chi_1(g_2)$	$\chi_1(g_3)$	$\dots$	$\chi_1(g_t)$
χ_2	$\chi_2(1)$	$\chi_2(g_2)$	$\chi_2(g_3)$	$\dots$	$\chi_2(g_t)$
χ_3	$\chi_3(1)$	$\chi_3(g_2)$	$\chi_3(g_3)$	$\dots$	$\chi_3(g_t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
χ_t	$\chi_t(1)$	$\chi_t(g_2)$	$\chi_t(g_3)$		$\chi_t(g_t)$

$$\chi_1(g) = 1 \quad \forall g \in G \text{ "τετριμμένη"}$$

$$\text{Έστω } n_i := \chi_i(1)$$

$$\text{Ζέρουμε ότι: } * \sum n_i^2 = |G|$$

$$* \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} = \delta_{ij} |G|$$

$$* \sum_i \overline{\chi_i(g)} \chi_i(h) = \begin{cases} \frac{|G|}{\#C_j} & \text{αν } g, h \in C_j \\ 0 & \text{αν } g, h \text{ δεν είναι συζυγή} \end{cases}$$

$$* \text{Αν } \chi_i(1) = 1, \text{ τότε } \chi_i(g) \text{ ρίζα της μονάδας}$$

$$\text{Θα δούμε αργότερα ότι: } * n_i \mid |G| \quad \forall i=1, \dots, t$$

Παράδειγμα

$$G = S_3$$

$$C_1 = \{1\}, \quad C_2 = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$$

$$C_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$\text{Αρα } |\text{Irr}(\mathbb{C}G)| = 3 = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$$

$$\chi_1(1) = 1$$

$$\chi_1(1)^2 + \chi_2(1)^2 + \chi_3(1)^2 = 6 \Rightarrow \chi_2(1) = 1, \chi_3(1) = 2$$

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	a	b
χ_3	2	c	d

$$\text{Έχουμε: } a^2 = 1 \Rightarrow a \in \{1, -1\}, \quad b^3 = 1 \Rightarrow b \in \{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$$

$$\langle \chi_2, \chi_1 \rangle = 0 \Rightarrow 1 + 3a + 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{-1-3a}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Αρα } b = 1 \text{ και } a = (-1-2b)/3 = -1 \rightsquigarrow \chi_2 \text{ sign representation}$$

Θα μπορούσαμε να μη χρησιμοποιήσουμε τίποτα άλλο πέρα από το

ότι τα a, b είναι ρίζες της μονάδας και τη σχέση $\langle \chi_2, \chi_2 \rangle = 1$

$$\left. \begin{aligned} \langle \chi_3, \chi_1 \rangle = 0 &\Rightarrow 2 + 3c + 2d = 0 \\ \langle \chi_3, \chi_2 \rangle = 0 &\Rightarrow 2 - 3c + 2d = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} c &= 0 \\ d &= -1 \end{aligned}$$

Αναπαραστάσεις διάσπασης 1

$\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$ αναπαράσταση

$$\rho(g) = \chi(g) \Rightarrow \chi(gh) = \chi(g)\chi(h) \quad \forall g, h \in G$$

$\Rightarrow \chi$ ομομορφισμός ομάδων

Πρόταση: G αβελιανή $\Leftrightarrow$ όλες οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της G είναι διάσπασης 1.

Αποδ " $\Rightarrow$ " $|\text{Irr}(\mathbb{C}G)| = \#$ υψώσεις ισοδυναμίας της $G = |G|$

(αφού $hgh^{-1} = g \quad \forall g, h \in G$)

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(\mathbb{C}G)} \chi(1)^2 = |G| \Rightarrow \chi(1) = 1 \quad \forall \chi \in \text{Irr}(\mathbb{C}G)$$

" $\Leftarrow$ " $|\text{Irr}(\mathbb{C}G)| = \#$ υψώσεις ισοδυναμίας της $G = |G|$

Αρα κάθε στοιχείο της G είναι μόνο του στην υψωση συζυγίας του

$$\text{Όποτε } hgh^{-1} = g \quad \forall g, h \in G \Rightarrow hg = gh \quad \forall g, h \in G$$

Πόρισμα Αν G αβελιανή, τότε $\chi(g)$ είναι ρίζα της μονάδας
ζώσης ίσης με την ζώση του g

Παραδείγματα:

$G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	1	c	c^2	c^3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	- i
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	- i	-1	i

$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	1	σ_1	σ_2	$\sigma_1\sigma_2$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

$$\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}^4$$

Άσκηση:

Κατασκευάστε τους πίνακες χαρακτήρων όλων των ομάδων τάξης 8 (3 αβελιανές, διεδρική, quaternion) καθώς και της εναλητάσσουσας ομάδας A_4