Παρατήρηση:

Αν G_1, G_2 είναι δύο πεπερασμένες ομάδες τέτοιες ώστε
$\{\{\chi(1) \mid \chi \in Irr(\mathbb{C}G_1)\}\} = \{\{\varphi(1) \mid \varphi \in Irr(\mathbb{C}G_2)\}\}$
τότε από το Θ. Wedderburn - Artin, $\mathbb{C}G_1 \cong \mathbb{C}G_2$
Αυτό δε σημαίνει ότι $G_1 \cong G_2$
Προφανώς ισχύει για G_1, G_2 αβελιανές με $|G_1| = |G_2|$
αφού αν G αβελιανή, τότε $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}^{|G|}$
Π.χ. $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $G_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
Την επόμενη φορά θα δούμε ότι το παραπάνω ισχύει
για $G_1 = D_8$, $G_2 = Q_8$.

Κανονικές υποομάδες και αναπαραστάσεις

Αν $N \trianglelefteq G$, τότε G/N πεπερασμένη ομάδα.
Έστω $\pi_N : G \longrightarrow G/N$ ο κανονικός επιμορφισμός
Αν $\bar{\rho} : G/N \longrightarrow GL(V)$ αναπαράσταση, τότε $\bar{\rho} \circ \pi_N : G \longrightarrow GL(V)$
είναι αναπαράσταση. Άρα κάθε αναπαράσταση της G/N "προέρχεται"
από κάποια αναπαράσταση της G. Από την άλλη, αν $\rho : G \longrightarrow GL(V)$
είναι αναπαράσταση της G, τότε η ρ περνάει (factors through) στην G/N ανν
$N \subseteq Ker\rho$. Η μια αναπαράσταση είναι ανάγωγη ανν η άλλη είναι
Έχουμε $Irr(G/N) \longleftrightarrow \{\rho \in Irr(G) \mid N \subseteq Ker\rho\}$

Παράδειγμα: $G = S_3$, $N = A_3 = \{1, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$G/N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	1	t		
χ_1	1	1	⇝ τετριμμένη στην S_3	$\chi_1(A_3) = 1$
χ_2	1	-1	⇝ πρόσημο στην S_3	$\chi_2(A_3) = 1$

$t = (1\ 2)A_3$

Εφαρμογή:

$G/[G,G] =: G^{ab}$ αβελιανή

$\Rightarrow$ Όλες οι αναπαραστάσεις είναι διάστασης 1

$\Rightarrow$ Καθεμία αντιστοιχεί σε αναπαράσταση διάστασης 1 της G

Από την άλλη, αν $\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ αναπαράσταση διάστασης 1

τότε $\rho(x^{-1}y^{-1}xy) = \rho(x)^{-1}\rho(y)^{-1}\rho(x)\rho(y) = 1 \quad \forall\, x,y \in G$

οπότε $[G,G] \subseteq \operatorname{Ker}\rho$

$\Rightarrow \{\chi \in \operatorname{Irr}(\mathbb{C}G) \mid \chi(1) = 1\} \longleftrightarrow \operatorname{Irr}(\mathbb{C}G^{ab})$

Πρόταση: Έστω $H \leqslant G$.

$H \trianglelefteq G \iff \exists\, \rho$ αναπαράσταση της G τ.ω. $\operatorname{Ker}\rho = H$

Αποδ. Αν $H \trianglelefteq G$, έστω $\bar{\rho} = \rho^{reg}_{G/H}$. Έχουμε $\operatorname{Ker}\rho^{reg}_{G/H} = \{H\}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(\bar{\rho} \circ \pi_H) = H$. Η άλλη κατεύθυνση είναι κλασική Θ.Ομάδων

Πόρισμα: $H \trianglelefteq G \iff \exists$ χαρακτήρας χ τ.ω. $H = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$

Αποδ. Αν $H \trianglelefteq G$, τότε $\chi_{\rho^{reg}_{G/H} \circ \pi_H}(g) = \begin{cases} |G/H| = \chi_{\rho^{reg}_{G/H} \circ \pi_H}(1) & \text{αν } g \in H \\ 0 & \text{αν } g \notin H \end{cases}$

Για την άλλη κατεύθυνση, αν $g \in G$ και $h \in H$, τότε

$\chi(g^{-1}hg) = \chi(h) = \chi(1) \Rightarrow g^{-1}hg \in H$

Ορισμός : $\ker \chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$

Πρόταση: $\ker \chi = \ker \rho$, όπου χ είναι ο χαρακτήρας της ρ

Αποδ. $\ker \rho \subseteq \ker \chi$ προφανές

Αν τώρα $\chi(g) = \chi(1)$, δεδομένου ότι το $\chi(g)$ είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του $\rho(g)$ και οι ιδιοτιμές είναι ρίζες της μονάδας, αναγκαστικά όλες οι ιδιο $\underset{\text{Λήμμα}}{\Rightarrow}$ $\rho(g) = 1$ $(|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|)$

Λήμμα: $\rho(g)$ διαγωνοποιήσιμος (επί του $\mathbb{C}$)

Αποδ. Έχουμε $\rho(g)^n = 1$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί το $x^n - 1$

$\Rightarrow$ το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο διακριτών πρωτοβάθμιων πολυωνύμων $\Rightarrow \rho(g)$ διαγωνοποιήσιμος

Πρόταση: Αν $\chi = \sum_{i=1}^{t} n_i \chi_i$ όπου $\{\chi_1, \dots, \chi_t\} = Irr(\mathbb{C}G)$,
τότε $Ker\chi = \bigcap_{i=1}^{t} Ker\chi_i$

Αποδ. $\rho = \bigoplus_{i=1}^{t} n_i \rho_i \Rightarrow Ker\rho = \bigcap_{i=1}^{t} Ker\rho_i$

Πόρισμα: Έστω $Irr(\mathbb{C}G) = \{\chi_1, \dots, \chi_t\}$ και $N_i = Ker\chi_i$, $i = 1, \dots, t$
Τότε $N \trianglelefteq G \Leftrightarrow N$ είναι η τομή κάποιων N_i

Παράδειγμα:

$G = S_3$

$C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$

$C_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

	C_1	C_2	C_3	
χ_1	1	1	1	$N_1 = S_3$
χ_2	1	-1	1	$N_2 = A_3$
χ_3	2	0	-1	$N_3 = \{1\}$

Αυτές είναι οι κανονικές υποομάδες της S_3

Άσκηση: Ποιες είναι οι κανονικές υποομάδες των A_4, D_8, Q_8;

Παραδείγματα:

$G=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

	1	c	c^2	c^3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	$-i$	-1	i

$N_1 = G$

$N_2 = \{1\}$

$N_3 = \{1, c^2\}$

$N_4 = \{1\}$

$G=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

	1	σ_1	σ_2	$\sigma_1\sigma_2$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

$N_1 = G$

$N_2 = \{1, \sigma_2\}$

$N_3 = \{1, \sigma_1\}$

$N_4 = \{1, \sigma_1\sigma_2\}$

$N_2 \cap N_3 = \{1\}$

Κανονική διάσπαση μιας αναπαράστασης

Έστω (V,ρ) μια αναπαράσταση της G.

Τότε $V = \bigoplus_{i=1}^{t} n_i V_i$ όπου $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G) = \{ \overset{\chi_1}{V_1},\dots,\overset{\chi_t}{V_t}\}$

Έχουμε $n_i = \langle \chi_V, \chi_i \rangle$, οπότε τα n_i είναι μοναδικά ορισμένα

Έστω $U_i = n_i V_i$ $\forall\, i = 1,\dots,t$ Τότε $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_t$ $(*)$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω p_i η προβολή $V \longrightarrow U_i$. Τότε

$p_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \cdot \sum_{g\in G} \chi_i(g^{-1})\rho(g)$, οπότε η διάσπαση $(*)$ είναι μοναδική

<u>Απόδ</u> Θέτουμε $q_i := \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_i(g^{-1})\rho(g)$

$$q_i\big|_{V_j} \underset{\text{Μαθ.17}}{=} \frac{\chi_i(1)}{|G|} \cdot \frac{|G|}{\chi_j(1)} \langle \chi_i,\chi_j\rangle id_{V_j} = \frac{\chi_i(1)}{\chi_j(1)} \cdot \langle \chi_i,\chi_j\rangle id_{V_j} = \begin{cases} id_{V_i} & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i\neq j \end{cases}$$

Αν τώρα $v \in V$ και $v = u_1 + \dots + u_t$ με $u_i \in U_i$ έχουμε

$q_i(v) = q_i(u_1) + \dots + q_i(u_t) = u_i$

<u>Προσοχή</u>: Τα V_i εξαρτώνται από τη βάση που χρησιμοποιούμε

<u>Παράδειγμα</u>: $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, s\}$

V_1	1	1
V_2	1	-1

Έστω $V = \mathbb{R}^4$, $\rho: G \longrightarrow GL(\mathbb{R}^4)$

$$s \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(\rho(1) + \rho(s)\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\left(\rho(1) - \rho(s)\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_3 + x_4)$$
$$\Rightarrow \operatorname{Im} p_1 = \langle (1,1,0,0), (0,0,1,1) \rangle = U_1$$

$$p_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2, -x_1 + x_2, x_3 - x_4, -x_3 + x_4)$$
$$\Rightarrow \operatorname{Im} p_2 = \langle (1,-1,0,0), (0,0,1,-1) \rangle = U_2$$

$$\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$$

Από εκεί και πέρα, $U_1 = \overset{\substack{V_1 \\ \cong}}{\langle (1,1,0,0) \rangle} \oplus \overset{\substack{V_1 \\ \cong}}{\langle (0,0,1,1) \rangle}$

$$= \underset{\substack{\cong \\ V_1}}{\langle (1,1,1,1) \rangle} \oplus \underset{\substack{\cong \\ V_1}}{\langle (1,1,-1,-1) \rangle}$$

και γενικότερα U_1 είναι το ευθύ άθροισμα δύο οποιωνδήποτε διακριτών ευθειών μέσα στο U_1

Το κέντρο $Z(\mathbb{C}[G])$

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \{ u \in \mathbb{C}[G] \mid ux = xu \ \forall x \in \mathbb{C}[G] \}$$
$$= \{ u \in \mathbb{C}[G] \mid ug = gu \ \forall g \in G \}$$

μεταθετικός δακτύλιος

Εστω $C_1, \dots, C_t$ οι κλάσεις συζυγίας της G και $e_i := \sum_{g \in C_i} g$

Τοτε $he_ih^{-1} = e_i \ \forall i = 1, \dots, t \ \forall h \in G$

$\Rightarrow e_i \in Z(\mathbb{C}[G])$

Προφανώς τα e_i είναι γραμ. ανεξάρτητα

Αν $u = \sum \lambda_g g \in Z(\mathbb{C}[G])$, τοτε $huh^{-1} = \sum \lambda_g hgh^{-1} = \sum \lambda_g g = u$ για κάθε $h \in G$. Αρα $\lambda_{h^{-1}gh} = \lambda_g$.

Οποτε τα $\{e_1, \dots, e_t\}$ αποτελουν βάση του $Z(\mathbb{C}[G])$ ως $\mathbb{C}$-διαν. χωρο, δηλ. $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}[G]) = t$.

Καθε ανάγωγη αναπαρασταση $\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i)$ ορίζει ένα ομομορφισμο αλγεβρών $\tilde{\rho}_i : \mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathrm{End}_k(V_i)$

Αν $u \in Z(\mathbb{C}[G])$, τοτε $\tilde{\rho}_i(u) = \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{V_i}$ για κάποιο $\lambda_i \in \mathbb{C}$ από το Λήμμα του Schur. Έχουμε ενα ομομορφισμό αλγεβρων

$$\omega_{\chi_i} : Z(\mathbb{C}[G]) \longrightarrow \mathbb{C}, \ u \longmapsto \lambda_i = \frac{\chi_i(u)}{\chi_i(1)}$$

Αν $u = \sum \lambda_g g$, τότε $\chi_i(u) = \sum \lambda_g \chi_i(g)$

Αν $u = \sum \mu_j e_j$, τοτε $\chi_i(u) = \sum \mu_j c_j \chi_i(s_j)$ όπου $c_j = |C_j|$ και $s_j \in C_j$

Πρόταση: $Z(\mathbb{C}[G]) \cong \mathbb{C}^t$