$A_4 = \{ \sigma \in S_4 \mid sgn(\sigma) = 1 \}$

Πίνακας χαρακτήρων

	1	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	a_1	a_2	a_3	a_4
χ_3	b_1	b_2	b_3	b_4
χ_4	c_1	c_2	c_3	c_4

$1 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 12 \Rightarrow a_1 = b_1 = 1 \,,\; c_1 = 3$

$A_4 = \{ \sigma \in S_4 \mid sgn(\sigma) = 1 \}$

Πίνακας χαρακτήρων

	1	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	a_2	a_3	a_4
χ_3	1	b_2	b_3	b_4
χ_4	3	c_2	c_3	c_4

$a_2^2 = b_2^2 = 1 \qquad a_3^3 = a_4^3 = b_3^3 = b_4^3 = 1$

$\langle \chi_2, \chi_1 \rangle = 0 \Rightarrow 1 + 3a_2 + 4a_3 + 4a_4 = 0$

$\xRightarrow{a_2 = \pm 1} a_3 + a_4 = -1$

$\Rightarrow a_2 = 1$

$\langle \chi_3, \chi_1 \rangle = 0 \Rightarrow b_2 = 1 \ , \ b_3 + b_4 = -1$

$\chi_2 \neq \chi_3$

$A_4 = \{ \sigma \in S_4 \mid sgn(\sigma) = 1 \}$

Πινακας χαρακτήρων

	1	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	c_2	c_3	c_4

όπου $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$a_2^2 = b_2^2 = 1 \quad a_3^3 = a_4^3 = b_3^3 = b_4^3 = 1$

$\langle \chi_2, \chi_1 \rangle = 0 \Rightarrow 1 + 3a_2 + 4a_3 + 4a_4 = 0$

$\overset{a_2 = \pm 1}{\Longrightarrow} a_3 + a_4 = -1$

$\Rightarrow a_2 = 1$

$\langle \chi_3, \chi_1 \rangle = 0 \Rightarrow b_2 = 1 \ , \ b_3 + b_4 = -1$

$\chi_2 \neq \chi_3$

$A_4 = \{ \sigma \in S_4 \mid sgn(\sigma) = 1 \}$

Πινακας χαρακτήρων

	1	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	c_2	c_3	c_4

όπου $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\langle \chi_4, \chi_1 \rangle = 0 \Rightarrow 3 + 3c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 0$

$\langle \chi_4, \chi_2 \rangle = 0 \Rightarrow 3 + 3c_2 + 4\omega^2 c_3 + 4\omega c_4 = 0$

$\langle \chi_4, \chi_3 \rangle = 0 \Rightarrow 3 + 3c_2 + 4\omega c_3 + 4\omega^2 c_4 = 0$

$A_4 = \{ \sigma \in S_4 \mid sgn(\sigma) = 1 \}$

Πινακας χαρακτήρων

	1	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	c_2	c_3	c_4

όπου $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$$\left.\begin{array}{l} \langle \chi_4, \chi_1 \rangle = 0 \Rightarrow 3 + 3c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 0 \\ \langle \chi_4, \chi_2 \rangle = 0 \Rightarrow 3 + 3c_2 + 4\omega^2 c_3 + 4\omega c_4 = 0 \\ \langle \chi_4, \chi_3 \rangle = 0 \Rightarrow 3 + 3c_2 + 4\omega c_3 + 4\omega^2 c_4 = 0 \end{array}\right\} \overset{\oplus}{\Longrightarrow}$$

$9 + 9c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$

$$A_4 = \{ \sigma \in S_4 \mid sgn(\sigma) = 1 \}$$

Πίνακας χαρακτήρων

	1	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	c_3	c_4

όπου $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$$\left.\begin{array}{l} \langle \chi_4, \chi_1 \rangle = 0 \Rightarrow 3 + 3c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 0 \\ \langle \chi_4, \chi_2 \rangle = 0 \Rightarrow 3 + 3c_2 + 4\omega^2 c_3 + 4\omega c_4 = 0 \\ \langle \chi_4, \chi_3 \rangle = 0 \Rightarrow 3 + 3c_2 + 4\omega c_3 + 4\omega^2 c_4 = 0 \end{array}\right\} \overset{\oplus}{\Longrightarrow}$$

$$9 + 9c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} c_3 + c_4 = 0 \\ \omega c_3 + c_4 = 0 \\ c_3 + \omega c_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_4 = -c_3 \\ (\omega - 1) c_3 = 0 \\ (1-\omega) c_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_3 = c_4 = 0$$

$A_4 = \{ \sigma \in S_4 \mid sgn(\sigma) = 1 \}$

Πινακας χαρακτήρων

	1	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

όπου $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$A_4 = \{ \sigma \in S_4 \mid sgn(\sigma) = 1 \}$

Πινακας χαρακτήρων

	1	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

όπου $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$Ker\chi_1 = A_4$

$$\underset{\underset{Ker\chi_3}{\parallel}}{Ker\chi_2} = \{ 1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3) \} \trianglelefteq A_4$$

$Ker\chi_4 = \{1\}$

Αλγεβρικοί ακέραιοι και αναπαραστάσεις

Έστω A ένας μεταθετικός δακτύλιος και $B \subseteq A$ υποδακτύλιος. Ένα στοιχείο $a \in A$ ονομάζεται ακέραιο (integral) επί του B αν υπάρχει μονικό πολυώνυμο $f(x) \in B[X]$ με $\deg f(x) \geq 1$ τ.ώ. $f(a) = 0$

Αν $A = \mathbb{C}$ και $B = \mathbb{Z}$, τότε το a ονομάζεται αλγεβρικός ακέραιος.

Παρατήρηση: Τα στοιχεία του A είναι ακέραια επί του A

Θεώρημα: Έστω B υποδακτύλιος του A και $a \in A$. Τ.Α.Ε.Ι:

(i) a ακέραιο επί του B

(ii) $B[a]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο B-πρότυπο

(iii) $B[a] \subseteq C$ όπου C είναι υποδακτύλιος του A που είναι πεπ. παραγ. ως B-πρότυπο

(iv) Υπάρχει πιστό $B[a]$-πρότυπο M, που είναι πεπ. παραγ. ως B-πρότυπο.

Αποδ. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Αν $a^n = -b_{n-1}a^{n-1} - \dots - b_1 a - b_0$, τότε

$B[a] = \{ f(a) \mid f(x) \in B[X] \} = \langle 1, a, \dots, a^{n-1} \rangle$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Παίρνουμε $C = B[a]$

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Παίρνουμε $M=C$. Εστω $f(x)\in B[x]$. Αν $f(a)\in Ann_{B[a]}M$

τοτε $f(a)\cdot 1=0 \Rightarrow f(a)=0$. Αρα M πιστό.

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Εστω $f: M \to M,\ m \mapsto a\cdot m \in End_B(M)$

Τότε απο το παρακάτω θεωρημα (αντιστοιχο του Cayley-Hamilton)

υπάρχουν $b_0,\dots,b_{n-1}\in B$ τ.ω. $f^n+b_{n-1}f^{n-1}+\dots+b_1 f+b_0\, id_M=0$

Αρα $\forall\, m\in M\ (a^n+b_{n-1}a^{n-1}+\dots+b_1 a+b_0)\cdot m=0 \overset{M \text{ πιστο}}{\Longrightarrow}$

$a^n+b_{n-1}a^{n-1}+\dots+b_1 a+b_0=0$

<u>Θεώρημα:</u> Αν M πεπερασμενα παραγομενο R-προτυπο με n γεννητορες και $f\in End_R(M)$ με $f(M)\subseteq IM$ για κάποιο ιδεωδες I του R, τοτε υπαρχουν $a_0,\dots,a_{n-1}\in I$ τ.ω.

$f^n+a_{n-1}f^{n-1}+\dots+a_1 f+a_0\, id_M=0$

<u>Πορισμα:</u> Αν $a_1,\dots,a_m$ ακέραια επί του B, τοτε $B[a_1,\dots a_m]$ πεπερασμενα παραγ. B-προτυπο

<u>Πόρισμα:</u> $\overline{B}^A=\{a\in A \mid a \text{ ακεραιο επι του } B\}$ είναι υποδακτυλιος του A που περιεχει το B.

<u>Αποδ.</u> Αν $x,y\in\overline{B}^A$ τοτε $C=B[x,y]$ είναι ενας υποδακτυλιος

του A πεπερ. παραγ. ως B-πρότυπο, που περιέχει το $B[x-y]$ και το $B[xy]$. Απο το κύριο θεωρημα, παίρνουμε ότι $x-y \in \overline{B}^A$ και $xy \in \overline{B}^A$

<u>Ορισμος</u>: Ο δακτύλιος $\overline{B}^A$ ονομάζεται <u>ακέραια θήκη</u> του B μέσα στο A. Αν $\overline{B}^A = B$, λέμε ότι το B είναι <u>ακέραια κλειστό</u> μεσα στο A. Αν ο ορος «μέσα στο A» παραλειπεται, εννοείται ότι το A είναι το σώμα πηλίκο της ακέραιας περιοχής B.

<u>Παρατήρηση</u>: Το $\mathbb{Z}$ είναι ακέραια κλειστό.

<u>Πρόταση</u> Για καθε χαρακτήρα χ και για καθε $g \in G$, το $\chi(g)$ είναι αλγεβρικός ακέραιος.

<u>Απόδ.</u> Το $\chi(g)$ είναι άθροισμα ριζών της μονάδας.

<u>Προταση</u> : Αν $u := \sum \lambda_g g \in Z(\mathbb{C}[G])$ και τα λ_g είναι αλγεβρικοί ακέραιοι, τοτε το u είναι ακέραιο επί του $\mathbb{Z}$.

<u>Αποδ</u> Έστω $C_1, \dots, C_t$ οι κλάσεις συζυγίας της G και $s_j \in C_j \ \forall j$

Τοτε $u = \sum \lambda_{s_j} e_j$ όπου $e_j = \sum_{g \in C_j} g$

Αρκεί ν.δ.ο. το e_j είναι ακέραιο επί του $\mathbb{Z}$

Για καθε $i, j \in \{1, \dots, t\}$ εχουμε $e_i e_j \in Z(\mathbb{C}[G])$

οποτε το $e_i e_j$ γραφεται ως γραμμικός συνδυασμος των $e_1, \dots, e_t$ και μάλιστα με ακέραιους συντελεστές. Αρα το $\mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_t$ είναι υποδακτύλιος του $Z(\mathbb{C}[G])$ που είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο.

Αρα τα $e_1, \dots, e_t$ είναι ακέραια επι του $\mathbb{Z}$

<u>Πορισμα:</u> $\omega_{\chi_i}(u) = \dfrac{\chi_i(u)}{\chi_i(1)}$ είναι αλγεβρικος ακέραιος

<u>Πόρισμα:</u> $\chi_i(1) \mid |G| \ \forall i = 1, \dots, t$

<u>Αποδ.</u> Έστω $u = \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) g$

Αφου τα χ είναι συναρτήσεις κλάσης, έχουμε $u \in Z(\mathbb{C}[G])$

Επίσης τα $\chi(g^{-1})$ είναι αλγεβρικοί ακέραιοι, οποτε το παραπάνω πόρισμα μας δίνει ότι ο αριθμος: $\dfrac{1}{\chi_i(1)} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) \chi_i(g)$

είναι αλγεβρικος ακέραιος $\Rightarrow$

$\frac{|G|}{\chi_i(1)} \cdot \langle \chi_i, \chi_i \rangle = \frac{|G|}{\chi_i(1)}$ είναι αλγεβρικός ακέραιος

Αφού $\frac{|G|}{\chi_i(1)} \in \mathbb{Q}$, προκύπτει ότι $\frac{|G|}{\chi_i(1)} \in \mathbb{Z}$.

Θεώρημα Burnside

Ορισμός: Μια ομάδα G λέγεται επιλύσιμη αν υπάρχουν κανονικές υποομάδες $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_k = G$ τ.ω. G_j / G_{j-1} είναι αβελιανή $\forall\, j = 1, \dots, k$

Θεώρημα: Αν $|G| = p^a q^b$ όπου p, q πρώτοι και $a, b \in \mathbb{N}$, τότε η G είναι επιλύσιμη.

Αποδ. Έστω $p^a q^b$ το μικρότερο γινόμενο δυνάμεων δύο πρώτων για το οποίο ισχύει ότι η G δεν είναι επιλύσιμη

Η G είναι απλή, γιατί αν $H \trianglelefteq G$, $H \neq \{1\}, G$ τότε λόγω ελαχιστικότητας της G, οι ομάδες H και G/H είναι επιλύσιμες, και άρα η G είναι επιλύσιμη.

Αν $ab = 0$, τότε η G είναι επιλυσιμη, άρα $a \neq 0, b \neq 0$

Επίσης η G δεν είναι αβελιανή και το κέντρο της είναι τετριμμένο (αφού είναι απλή)

Έστω S μια p-υποομάδα Sylow της G.

$Z(S) \neq \{1\}$, αφού S p-ομάδα.