Θεώρημα Burnside

Ορισμός: Μια ομάδα G λέγεται επιλύσιμη αν υπάρχουν κανονικές υποομάδες $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_k = G$ τ.ω.
G_j / G_{j-1} είναι αβελιανή $\forall\ j = 1, \dots, k$

Θεώρημα: Αν $|G| = p^a q^b$ όπου p, q πρώτοι και $a, b \in \mathbb{N}$, τότε η G είναι επιλύσιμη.

Αποδ. Έστω $p^a q^b$ το μικρότερο γινόμενο δυνάμεων δύο πρώτων για το οποίο ισχύει ότι η G δεν είναι επιλύσιμη
Η G είναι απλή, γιατί αν $H \trianglelefteq G$, $H \neq \{1\}, G$ τότε λόγω ελαχιστικότητας της G, οι ομάδες H και G/H είναι επιλύσιμες, και άρα η G είναι επιλύσιμη.
Αν $ab = 0$, τότε η G είναι επιλύσιμη, άρα $a \neq 0, b \neq 0$
Επίσης η G δεν είναι αβελιανή και το κέντρο της είναι τετριμμένο (αφού είναι απλή)
Έστω S μια p-υποομάδα Sylow της G.
$Z(S) \neq \{1\}$, αφού S p-ομάδα.
Έστω $x \in Z(S)$, $x \neq 1$
Έχουμε $|Cl(x)| = |G| / |G_x|$ όπου $G_x = \{g \in G \mid gx = xg\}$
Έχουμε $S \leq G_x$, άρα $|Cl(x)| = q^d$ για κάποιο $0 \leq d \leq b$

Αν $d=0$, τοτε $x \in Z(G)=\{1\}$: Ατοπο

Αρα $1 \leq d \leq b$.

Αφού το x δεν είναι συζυγές με το 1, είδαμε στο Μάθημα 17

ότι $\sum_{i=1}^{t} \chi_i(1)\chi_i(x)=0$ οπου $Irr(\mathbb{C}G)=\{\chi_1,\dots,\chi_t\}$

Αν χ_1 είναι ο τετριμμένος χαρακτήρας, τοτε $\sum_{i=2}^{t} \chi_i(1)\chi_i(x)=-1$

Αν όποτε $\chi_i(x)\neq 0$ έχουμε $q \mid \chi_i(1)$ για $i \geqslant 2$, τότε ο αριθμος

$\frac{1}{q}\sum_{i=2}^{t} \chi_i(1)\chi_i(x)$ ειναι αλγεβρικος ακέραιος και αρα $-\frac{1}{q}$

είναι αλγεβριυος ακεραιος : Ατοπο

Αρα υπάρχει χ_i με $i \geqslant 2$ τ.ω. $\chi_i(x)\neq 0$ και $q \nmid \chi_i(1)$.

Εστω $e=\sum_{g \in Cl(x)} g \in Z(\mathbb{C}[G])$

Εχουμε ότι το $\omega_{\chi_i}(e)$ είναι αλγεβριυος ακέραιος

$\omega_{\chi_i}(e)=\frac{\chi_i(e)}{\chi_i(1)}=q^d\frac{\chi_i(x)}{\chi_i(1)}$

Αφού μκδ$(q^d,\chi_i(1))=1$, υπάρχουν ακεραιοι α,β τ.ω.

$\alpha q^d+\beta\chi_i(1)=1 \Rightarrow \alpha q^d\frac{\chi_i(x)}{\chi_i(1)}+\beta\chi_i(x)=\frac{\chi_i(x)}{\chi_i(1)}$

Αρα $\frac{\chi_i(x)}{\chi_i(1)} \in \mathbb{C}$ είναι αλγεβρικός ακέραιος

Εστω $\alpha_1 := \frac{\chi_i(x)}{\chi_i(1)}$ και έστω $p(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του α_1

στο $\mathbb{Q}[x]$. Εχουμε $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (ιδιότητα αλγ. ακεραίων)

Αν $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ είναι οι ρίζες του $p(x)$, τοτε υάθε α_i είναι

το άθροισμα $\chi_i(1)$ ριζων της μονάδας διαιρουμενες απο $\chi_i(1)$

Εχουμε $|\alpha_i| \leq 1$. Ο σταθερός ορος του $p(x)$ είναι $\pm\prod \alpha_i \in \mathbb{Z}$

Εχουμε $|\prod\alpha_i| = \prod|\alpha_i| \leq 1 \Rightarrow \prod\alpha_i \in \{-1,0,1\}$

Αν $\prod\alpha_i=0 \Rightarrow \alpha_1=0$: Ατοπο

Αν $|\Pi\alpha_i| = 1$, τοτε $|\alpha_1| = 1$, και άρα $|\chi_i(x)| = \chi_i(1)$

$\Rightarrow \chi_i(x) = \chi_i(1) \cdot z$ για κάποια ρίζα της μονάδας $z \in \mathbb{C}$

δηλ. $\rho_i(x) = z \cdot id$

Εστω $N := Ker\rho_i$

Τοτε $G/N \cong Im\rho_i$

$x \cdot N \mapsto \rho_i(x)$

$\rho_i(x) \in Z(Im\rho_i) \Rightarrow xN \in Z(G/N)$

Αρα $(gN)(xN) = (xN)(gN) \quad \forall g \in G$

$\Rightarrow g^{-1}x^{-1}gx \in N \quad \forall g \in G$

Αφου $x \notin Z(G)$, υπάρχει $g \in G$ τ.ω. $g^{-1}x^{-1}gx \neq 1$

Αρα $N \neq \{1\}$

G απλη $\Rightarrow N = G \Rightarrow \rho_i = \rho_1$: Ατοπο.

<u>Πορισμα:</u> Αν G μη αβελιανη απλή πεπερασμένη ομαδα, τοτε η τάξη της G έχει τουλάχιστον 3 πρώτους διαιρέτες

<u>Περιορισμένες και επαγόμενες αναπαραστάσεις</u>
(Restricted and induced representations)

Έστω G πεπερασμένη ομάδα και H υποομάδα της G.

$gH := \{gh \mid h \in H\} \quad \forall g \in G$

$g_1 H = g_2 H \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in H$

Γράφουμε $g_1 \equiv g_2 \mod H$

$G/H = \{gH \mid g \in G\}$

$\# G/H = |G|/|H| = |G:H|$

Έστω R ένα σύνολο αντιπροσώπων των κλάσεων του G/H

Καθε $g \in G$ γραφεται με μοναδικο τρόπο ως $g = rh$ με $r \in R, h \in H$

Έστω $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ μια αναπαράσταση της G.

Τότε $\rho|_H : H \longrightarrow GL(V)$ είναι αναπαράσταση της H

Γράφουμε $\mathrm{Res}_H^G (V, \rho) = (V, \rho|_H)$

<u>Παρατήρηση</u>: (V,ρ) ανάγωγη $\not\Rightarrow$ $(V, \rho|_H)$ ανάγωγη

<u>Π.χ.</u> $G = S_3$, (V,ρ) ανάγωγη αναπαράσταση διάστασης 2

$H = A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ αβελιανή αρα $\mathrm{Res}_H^G(V,\rho)$ διασπάται

(Άσκηση: Ποια είναι αυτή η διάσπαση;)

Έστω $W \subseteq V$ υποαναπαράσταση της $(V, \rho|_H)$
(δηλ. $\rho|_H(h)(W) = W \ \forall h \in H$) με δομικό ομομορφισμό
$\vartheta : H \longrightarrow GL(W)$
Αν τώρα $g \in G$, τότε ο διανυσματικός χώρος $\rho(g)(W)$
εξαρτάται μόνο από το αριστερό σύμπλοκο gH.
Πράγματι, $\rho(gh)(W) = \rho(g)\rho(h)(W) = \rho(g)(W)$.
Οπότε αν $\sigma \in G/H$, ορίζουμε
$W_\sigma = \rho(s)(W) \quad \forall s \in \sigma$
Αν $g \in G$, τότε $\rho(g)(W_\sigma) = \rho(gs)(W) = W_{\sigma'}$
όπου $\sigma' \in G/H$ με $gs \in \sigma'$.
$\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ είναι άρα υποαναπαράσταση της V

<u>Παρατήρηση</u>: Αν R είναι σύνολο αντιπροσώπων του G/H,
τότε $\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma = \sum_{r \in R} \rho(r)(W)$

<u>Ορισμός</u>: Λέμε ότι μια αναπαράσταση $\rho : G \longrightarrow GL(V)$
<u>επάγεται</u> από μια αναπαράσταση $\vartheta : H \longrightarrow GL(W)$ και
γράφουμε $\mathrm{Ind}_H^G(W, \vartheta) = (V, \rho)$ αν $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$
(δηλ. αν $V = \sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ και το άθροισμα αυτό είναι ευθύ)
Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε:
$\dim V = |G : H| \cdot \dim W$

Παρατήρηση:

Αν $V = \bigoplus_{r \in R} \rho(r)(W)$, τότε κάθε $v \in V$ γράφεται ως $\sum_{i=1}^{n} r_i w$ όπου $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ με $n = |G:H|$. Έχουμε

$$g \cdot \sum_{i=1}^{n} r_i w = \sum_{i=1}^{n} r_i' (h_i \cdot w)$$

όπου $g \cdot r_i = r_i' h_i$ με $r_i' \in R$, $h_i \in H$

Παράδειγμα:

$G = S_3$, $H = A_3 = \{1, (1\ \underset{\parallel}{\overset{s}{2}}\ 3), (1\ \underset{\parallel}{\overset{s^2}{3}}\ 2)\}$

$G/H = \{H, (1\,2)H\}$

$W = \mathbb{C}$, $\rho : H \longrightarrow GL(\mathbb{C})$

$s \longmapsto \omega \qquad \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\mathrm{Ind}_H^G(W,\rho) = W \oplus (1\,2)W$

Βάση $\{e, (1\,2)e\}$

$1 \cdot e = e$, $1 \cdot (1\,2)e = (1\,2)e \Rightarrow \chi(1) = 2$

$s \cdot e = \omega e$, $s \cdot (1\,2)e = (1\,2)\omega^2 e \Rightarrow \chi(s) = \omega + \omega^2 = -1$

$s^2 \cdot e = \omega^2 e$, $s^2 \cdot (1\,2)e = (1\,2)\omega e \Rightarrow \chi(s^2) = \omega + \omega^2 = -1$

$(1\,2) \cdot e = (1\,2)e$, $(1\,2)(1\,2)e = e \Rightarrow \chi((1\,2)) = 0$

Τελικά $\mathrm{Ind}_H^G(W,\rho)$ = ανάγωγη αναπαράσταση διάστασης 2 της S_3