Άλγεβρα ΙΙ 2023–24
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση - Primitive ideals

Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα αριστερό ιδεώδες ονομάζεται *πρωτοειδές* αν είναι ο μηδενιστής ενός μη μηδενικού απλού R-προτύπου.

1. Να δείξετε ότι τα πρωτοειδή ιδεώδη είναι αμφίπλευρα.
2. Να δείξετε ότι τα πρωτοειδή ιδεώδη είναι πρώτα. Είναι μεγιστικά (αριστερά) ιδεώδη;
3. Να δείξετε ότι τα πρωτοειδή ιδεώδη είναι μεγιστικά αν ο R είναι μεταθετικός.
4. Ισχύει ότι κάθε αριστερό μεγιστικό ιδεώδες είναι πρωτοειδές;
5. Αν M είναι ένα μη μηδενικό πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και $N \leq M$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα μεγιστικό (γνήσιο) υποπρότυπο του M που περιέχει το N. Ισχύει το ίδιο αν το M δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο;
6. Αν M είναι ένα μη μηδενικό πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο, να δείξετε ότι υπάρχει ένα πρωτοειδές ιδεώδες I του R ώστε το IM να είναι γνήσιο υποπρότυπο του M.

Άσκηση - Δακτύλιοι πολυωνύμων

Έστω R ένας δακτύλιος και $R[X]$ ο αντίστοιχος δακτύλιος πολυωνύμων. Θεωρούμε τον R ως τον υποδακτύλιο του $R[X]$ που αποτελείται από τα σταθερά πολυώνυμα. Συμβολίζουμε με $J(R[X])$ το ριζικό Jacobson του $R[X]$.

1. Να δείξετε ότι για κάθε μηδενοδύναμο ιδέωδες $I \subseteq R$ ισχύει ότι $I[X] \subseteq J(R[X])$.
2. Να δείξετε ότι το $R \cap J(R[X])$ είναι ένα nil ιδεώδες του R.

Άσκηση - Αντιπαράδειγμα στο Λήμμα *Schur*

Έστω G μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα και (V, ρ) μια ανάγωγη αναπαράσταση πάνω από ένα σώμα k.

1. Δείξτε ότι αν το k είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε για κάθε $g \in G$, $\rho(g) \in \mathrm{End}_{kG}(V)$ και $\rho(g) = c\,\mathrm{id}_V$ για κάποιο $c \in k^*$. Συμπεράνετε ότι $\dim_k V = 1$.
2. Δείξτε ότι αν το k δεν είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε ο V μπορεί να έχει μεγαλύτερη διάσταση παίρνοντας το εξής παράδειγμα: Έστω $k = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ και $(\mathbb{R}^2, \rho)$ η αναπαράσταση έτσι ώστε ο γεννήτορας της G να δρα στο $\mathbb{R}^2$ με περιστροφή κατά $2\pi/3$. Να δείξετε ότι η αναπαράσταση αυτή είναι ανάγωγη. Πώς σπάει σε άθροισμα αναγώγων αν τη θεωρήσουμε επί του $\mathbb{C}$;

'Ασκηση - Αναπαράσταση δράσης μιας ομάδας

Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα, k ένα σώμα και X ένα σύνολο πάνω στο οποίο η G δρα. Συμβολίζουμε με $F(X,k)$ την k-άλγεβρα των συναρτήσεων του X μέσα στο k και e_x τη συνάρτηση $e_x(y) = \delta_{xy}$ για $y \in X$.

1. Δείξτε ότι η οικογένεια $(e_x)_{x\in X}$ είναι βάση του $F(X,k)$.
2. Δείξτε ότι το $F(X,k)$ είναι αναπαράσταση της G με $ge_x = e_{gx}$.
3. Δείξτε ότι $\dim_k F(X,k)^G = |X/G|$.
4. Δείξτε ότι $\chi_{F(X,k)}(g) = |X^g|$ όπου $X^g = \{x \in X, gx = x\}$.
5. Δείξτε ότι όταν $X = G$ και η δράση είναι ο πολλαπλασιασμός από αριστερά, τότε η παραπάνω αναπαράσταση είναι η κανονική αναπαράσταση της G.
6. Δείξτε τη φόρμουλα του Burnside: $\sum_{g\in G} |X^g| = |G||X/G|$.

   Για τις υπόλοιπες ερωτήσεις θεωρούμε ότι $|X| \geq 2$, $|X/G| = 1$ και ότι η χαρακτηριστική του k είναι μηδέν.

7. Δείξτε ότι υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $X^g = \emptyset$.
8. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
   (i) Η δράση της G στο X είναι διπλά μεταβατική, δηλαδή αν $x \neq y$, $x' \neq y'$, τότε υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $gx = x'$ και $gy = y'$.
   (ii) Η δράση της G στο $X \times X$ έχει 2 τροχιές: τη διαγώνια και το συμπλήρωμα αυτής.
   (iii) $\sum_{g\in G} |X^g|^2 = 2|G|$.
9. Καθορίστε την αναπαράσταση V για την οποία ισχύει $F(X,k) = F(X,k)^G \oplus V$.
10. Δείξτε ότι αν οι παραπάνω ισοδύναμες προτάσεις της ερώτησης 8 ικανοποιούνται, τότε η V είναι ανάγωγη αναπαράσταση.
11. Βρείτε τις υποαναπαραστάσεις της $F(X,k)$.
12. Δείξτε ότι αν η V είναι ανάγωγη αναπαράσταση και το k είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε οι ιδιότητες της ερώτησης 8 ικανοποιούνται.

'Ασκηση - Sudoku σε πίνακες χαρακτήρων

1. 'Εστω $n > 1$ ακέραιος και V ένας n-διάστατος $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος με βάση $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Επεκτείνωντας γραμμικά τη δράση της συμμετρικής ομάδας S_n με μεταθέσεις στην βάση $\bar{e}$ (δηλαδή $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$), θεωρούμε τον V ως $\mathbb{C}S_n$-πρότυπο. Δείξτε ότι η S_n-αναπαράσταση V είναι το άθροισμα της τετριμμένης αναπαράστασης και μιας ανάγωγης αναπαράστασης βαθμού $n-1$. Μπορείτε να ακολουθήσετε τα παρακάτω βήματα.
   (a) Δείξτε ότι η V είναι το ευθύ άθροισμα των υποαναπαραστάσεων $V_1 = \mathbb{C}(e_1 + \cdots + e_n)$ και $V_2 = \oplus_{i=1}^{i=n-1}\mathbb{C}(e_i - e_{i+1})$.
   (b) Δείξτε ότι η V_2 είναι ανάγωγη αναπαράσταση ως εξής: έστω $v \in V_2\backslash\{0\}$. Δείξτε ότι $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}S_n v > 1$ και πως κατά συνέπεια υπάρχει $v' \in \mathbb{C}S_n v \cap \oplus_{i=1}^{i=n-2}\mathbb{C}(e_i - e_{i+1})\backslash\{0\}$. Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο n δείξτε ότι τελικά ότι $\mathbb{C}S_n v' = V_2$.

2. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και χ_1, χ_2 δύο ανάγωγοι χαρακτήρες της G (πάνω απο το $\mathbb{C}$). Δείξτε ότι αν ο χ_1 είναι μονοδιάστατος, τότε ο $\chi_1\chi_2$ είναι επίσης ανάγωγος χαρακτήρας της G. (Αυτό βοηθάει στην κατασκευή χαρακτήρων από γνωστούς χαρακτήρες.)

3. Υπενθυμίζουμε τα παρακάτω στοιχεία για τις ομάδες S_4, A_4.

   - Η ομάδα S_4 έχει 5 κλάσεις συζυγίας, με αντιπροσώπους $(1), (12), (123), (1234), (12)(34)$ και αντίστοιχους αριθμούς στοιχείων $1, 6, 8, 6, 3$.
   - Η ομάδα A_4 έχει 4 κλάσεις συζυγίας, με αντιπροσώπους $(1), (12)(34), (123), (132)$ και αντίστοιχους αριθμούς στοιχείων $1, 3, 4, 4$.

   (a) Φτιάξτε τον πίνακα χαρακτήρων της S_4.

   (b) Φτιάξτε τον πίνακα χαρακτήρων της A_4.

   (Μπορείτε να βρείτε τους χαρακτήρες που λείπουν χωρίς να κατασκευάσετε τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις, χρησιμοποιώντας ιδιότητες χαρακτήρων και το μέρος 2 παραπάνω).