Γεώργιος Τσαρούμης: ΑΜ: 1112202000262

Θέμα Εργασίας: Μία απόδειξη του θεωρήματος του Fubini για τα διπλά ολοκληρώματα.

Θεώρημα του Fubini:

Έστω $\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$ ένα ορθογώνιο στο xy-επίπεδο και $f:\Pi\to\mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε ένα από τα $x\in[\alpha,\beta]$ θέτουμε $g_x(y)=f(x,y)$ $y\in[\gamma,\delta]$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_x:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$. Επίσης θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$L(x)=L\int_\gamma^\delta g_x=L\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \quad \text{και} \quad U(x)=U\int_\gamma^\delta g_x=U\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy$$

ορισμένες για $x\in[\alpha,\beta]$. Τότε οι συναρτήσεις L και U είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$ και μάλιστα:

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta L(x)\,dx=\int_\alpha^\beta U(x)\,dx$$

Απόδειξη

Παίρνουμε μία διαμέριση $P_x=\{\alpha=x_0<x_1<\dots<x_N=\beta\}$ του $[\alpha,\beta]$ και μία διαμέριση $P_y=\{\gamma=y_0<y_1<\dots<y_M=\delta\}$ του $[\gamma,\delta]$ οι οποίες ορίζουν την διαμέριση

$P=\{P_{ij}\}$ του ορθογωνίου Π δηλαδή

$P_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $i=1,2,\ldots,N$, $j=1,2,\ldots,M$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$\inf\{f(x,y):(x,y)\in P_{ij}\}\leq \inf\{g_x(y): y\in[y_{j-1},y_j]\}$

όταν $x\in[x_{i-1},x_i]$. Άρα για $x\in[x_{i-1},x_i]$,

$$\sum_{j=1}^{M}\inf\{f(x,y):(x,y)\in P_{ij}\}(y_j-y_{j-1})\leq\sum_{j=1}^{M}\inf\{g_x(y): y\in[y_{j-1},y_j]\}(y_j-y_{j-1})=L(g_x,P_y)\leq L\int_\gamma g_x=L(x)$$

και συνεπώς

$$\sum_{j=1}^{M}\inf\{f(x,y):(x,y)\in P_{ij}\}(y_j-y_{j-1})\leq \inf\{L(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

Επομένως

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{M}\inf\{f(x,y):(x,y)\in P_{ij}\}(y_j-y_{j-1})\right](x_i-x_{i-1})\leq$$

$$\sum_{i=1}^{N}\inf\{L(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}(x_i-x_{i-1})=L(\mathcal{L},P_x)$$

δηλαδή $L(f,P)\leq L(\mathcal{L},P_x)$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $U(\mathcal{L},P_x)\leq U(f,P)$ και από κοινού $L(f,P)\leq L(\mathcal{L},P_x)\leq U(\mathcal{L},P_x)\leq U(f$

Συνεπώς $U(\phi, P_x) - L(\phi, P_x) \leq U(f,P) - L(f,P)$ και η ολοκληρωσιμότητα της f συνεπάγεται με βάση το κριτήριο του Riemann την ολοκληρωσιμότητα της συνάρτησης ϕ πάνω στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ αφού όταν η διαφορά $U(f,P) - L(f,P)$ γίνει μικρή ακόμη μικρότερη γίνεται η διαφορά $U(\phi, P_x) - L(\phi, P_x)$ και αφού $L(\phi, P_x) \leq \int_\alpha^\beta \phi(x)dx \leq U(\phi, P_x)$

έπεται ότι $L(f,P) \leq \int_\alpha^\beta \phi(x)dx \leq U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του Π. Άρα $\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \phi(x)dx$.

Η απόδειξη της σχέσεως $\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta U(x)dx$ είναι ανάλογη και αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

Πόρισμα

Αν επιπλέον οι συναρτήσεις $g_x : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$, $x \in [\alpha, \beta]$ είναι όλες ολοκληρώσιμες τότε

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right) dx$$

και αν για τα $y \in [\gamma, \delta]$ ορίσουμε και τις συναρτήσεις $h_y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $h_y(x) = f(x,y)$, $\alpha \leq x \leq \beta$ και υποθέσουμε ότι και αυτές είναι όλες ολοκληρώσιμες πάνω στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε:

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right) dx = \int_\gamma^\delta \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx \right) dy$$

η απόδειξη είναι άμεση από το Θεώρημα

Θεώρημα

Ας θεωρήσουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις $\varphi, \psi: [\lambda,\mu] \to \mathbb{R}$ για τις οποίες να ισχύει $\varphi(x) < \psi(x)$ για κάθε $[\lambda,\mu]$ και ας ορίσουμε το ανοικτό σύνολο

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\lambda,\mu]$ και $\varphi(x) < y < \psi(x)\}$. Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: \bar{D} \to \mathbb{R}$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=\lambda}^{\mu} \left(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο της μορφής $\Pi = [\lambda,\mu] \times [\gamma,\delta]$ ούτως ώστε $D \subset \Pi$ και επεκτείνουμε τη συνάρτηση f στο Π ως εξής:

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{αν } (x,y) \in \bar{D} \\ 0, & \text{αν } (x,y) \in \Pi - \bar{D} \end{cases}$$

Έτσι από το προηγούμενο πόρισμα

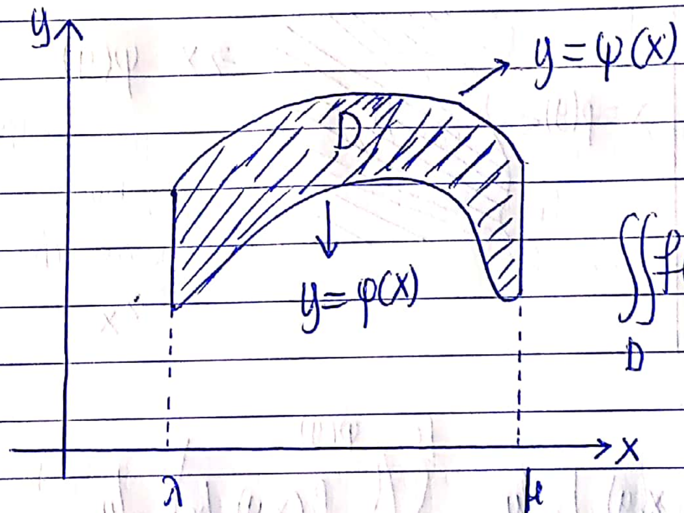
$$\iint_\Pi \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=\lambda}^{\mu} \left(\int_{y=\gamma}^{\delta} \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx$$

Είναι σαφές βέβαια ότι για κάθε σταθερό $x \in [\lambda, \mu]$ η συνάρτηση $g_x : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$ με

$g_x(y) = f(x,y)$ όταν $\varphi(x) < y < \psi(x)$ και $g_x(y) = 0$ όταν $y \in [\gamma, \delta] - [\varphi(x), \psi(x)]$, είναι ολοκληρώσιμη - προϋπόθεση για να ισχύει ο τύπος του Πορίσματος.

Αλλά $\displaystyle\int_{y=\gamma}^{\delta} f(x,y)\,dy = \int_{y=\gamma}^{\delta} g_x(y)\,dy = \int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$ και ο

τύπος του Θεωρήματος έπεται.



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=\lambda}^{\mu} \left(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

<u>Παρατήρηση</u>

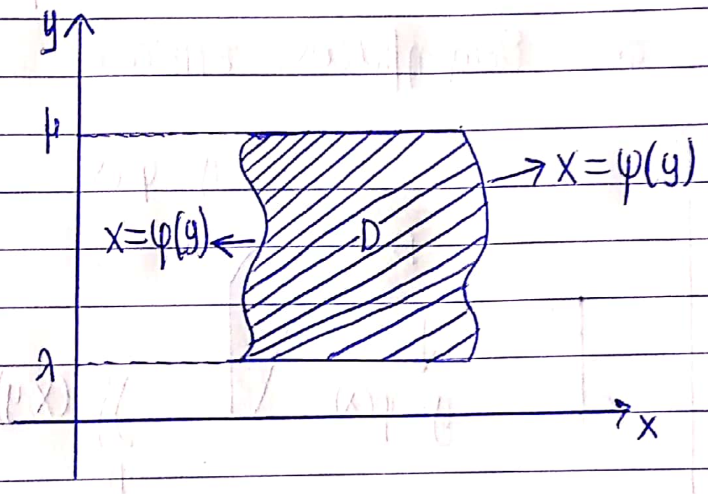
Ένας παρόμοιος τύπος ισχύει και για τα σύνολα της μορφής:

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\lambda, \mu] \text{ και } \varphi(y) < x < \psi(y) \}$ όταν

πάλι οι συναρτήσεις $\varphi, \psi : [\lambda, \mu] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχε και $\varphi(y) < \psi(y)$ για κάθε $y \in [\lambda, \mu]$. Έτσι αν $f: D \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=\lambda}^{\mu}\left(\int_{x=\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Βέβαια αυτό είναι αυτονόητο - οι μεταβλητές x και y είναι ισοδύναμες δηλαδή μπορούμε να αντιστρέψουμε τους ρόλους.



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=\lambda}^{\mu}\left(\int_{x=\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$$

Ένα παράδειγμα για να καταλάβουμε το Θεώρημα του Fubini.

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1} \frac{dx}{(1+x^5)^7}\, y\,dy = \iint_D \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^5)^7}$$

Scanned with CamScanner

όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<1,\ \sqrt{y}<x<1\}$ ή

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<1,\ 0<y<x^2\}$ βλέπουμε ότι

$$I=\int_0^1\left(\int_0^{x^2} y\,dy\right)\frac{dx}{(1+x^5)^7}=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^4\right)\frac{dx}{(1+x^5)^7}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^4}{(1+x^5)^7}dx=$$

$$=\frac{1}{10}\int_0^1\frac{d(1+x^5)}{(1+x^5)^7}=\left[-\frac{1}{60}(1+x^5)^{-6}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{21}{1280}$$

o